

# O POTENCIAL GENERALIZADO NO UNIVERSO DE DE-SITTER-CASTELNUOVO

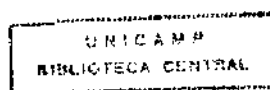
Este exemplar corresponde à redação final da  
tese devidamente corrigida e defendida pelo  
Sr. Denilson Gomes <sup>nr 585</sup> e aprovada pela Co-  
missão Julgadora.

Campinas, 01 de agosto de 1994



Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira <sup>t</sup>  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Ma-  
temática, Estatística e Ciência da Corn-  
putação, UNICAMP, como requisito parcial  
para a obtenção do título de Mestre em Ma-  
temática Aplicada.



*"Dedico este trabalho  
à Claudia, minha namorada,  
e aos meus pais."*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira pela competência e zelo na orientação deste trabalho.

Agradeço à Fundação Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa, sem a qual este trabalho não seria possível.

Agradeço ao Departamento de Matemática Aplicada (DMA) do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) da UNICAMP pelo amparo e suporte que tanto facilitaram este trabalho.

Agradeço, também, à Fátima pelo seu excelente trabalho de digitação dos manuscritos, ao Pedro Soares pela confecção das figuras que ilustram o texto e a todos os amigos pelo incentivo.

# ÍNDICE

<b>Capítulo I:</b> O Universo de de-Sitter–Castelnuovo e o grupo de Fantappié.....	1
§1 – – Introdução .....	1
§2 – – O universo de de-Sitter–Castelnuovo .....	3
§3 – – O grupo de Fantappié .....	7
<b>Capítulo II:</b> A Equação de Laplace Projetiva .....	15
§1 – – Introdução .....	15
§2 – – Equações Diferenciais Parciais Lineares Elípticas .....	15
§3 – – A Equação de Laplace Projetiva .....	21
<b>Capítulo III:</b> O Problema de Dirichlet no Interior da Esfera .....	25
§1 – – Introdução .....	25
§2 – – A Equação de Laplace Projetiva em Coordenadas Esféricas .....	25
§3 – – A Equação Radial .....	26
§4 – – O Problema de Dirichlet para a Esfera .....	30
<b>Capítulo IV:</b> Sobre a solução Polinomial da Equação de Laplace Projetiva .....	32
§1 – – Introdução .....	32
§2 – – A solução Polinomial .....	32

§3 — — Conexão com as Funções Especiais .....	34
§4 — — Estudo dos Polinômios $E_n^\ell(\rho)$ e $G_n^\ell(\rho)$ .....	37
§5 — — A Lei de Gravitação no Universo de Castelnuovo .....	41
Apêndice: .....	43
Conclusão: .....	45
Referências: .....	47

# RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar o modelo cosmológico de de-Sitter através de sua representação projetiva introduzido por Castelnuovo, bem como o estudo clássico da equação diferencial parcial satisfeita pelo potencial escalar nesse modelo de universo, a chamada equação de Laplace projetiva.

Obtemos a equação de Laplace projetiva na sua forma mais geral dependendo de um parâmetro  $\lambda$ . Mostramos a unicidade da solução do problema de Dirichlet quando temos  $-2 \leq \lambda \leq 0$ .

Estudando a equação de Laplace projetiva em domínios esféricos emerge uma certa classe de polinômios que permitem a generalização da lei da gravitação de Newton ao universo de de-Sitter. Ainda neste caso, consideramos o problema de Dirichlet para a equação de Laplace projetiva como um problema de auto-valores, obtendo assim o equivalente da alternativa de Fredholm para a teoria espectral.

# ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to study the de-Sitter cosmological model by means of the projective representation introduced by Castelnuovo and the study of the partial differential equation satisfied by the scalar potential in this universe, the so called projective Laplace equation.

We obtain the projective Laplace equation in the general form depending on a parameter  $\lambda$ . We show the unicity of the solution when we consider the Dirichlet problem when we have  $-2 \leq \lambda \leq 0$ .

In the study of the projective Laplace equation in a spherical domain we obtain a class of polynomials which generalizes the Newton gravitation law for the de-Sitter universe. Finally, we consider the Dirichlet problem for the projective Laplace equation as an eigenvalue problem and thus we obtain an equivalence to the Fredholm alternative for spectral theory.

# CAPÍTULO I

## O UNIVERSO DE DE-SITTER—CASTELNUOVO E O GRUPO DE FANTAPPIÉ

### §1. INTRODUÇÃO

A estrutura do universo, principalmente em escala cosmológica, ou seja, o chamado problema cosmológico, está longe de ser resolvido, devido tanto às dificuldades teóricas como à falta de dados astronômicos precisos em tal escala.

O universo newtoniano, baseado na mecânica clássica de Newton (1687) e o universo de Minkowski, formulado a partir da Teoria da Relatividade Especial de Einstein (1906) tendo, respectivamente, como transformação entre referenciais inerciais o grupo de Galilei e o grupo de Poincaré, foram os primeiros modelos cosmológicos propostos. Ambos supõem um espaço euclidiano tridimensional infinito tendo uma distribuição não nula de matéria em todo o espaço. Sabemos que o potencial de uma dada distribuição de massa é dado pela integral de volume estendida a todo o espaço:

$$\varphi(y) = -k \int_V \left( \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right)^{-1/2} \mu(x) dV_x$$

onde  $\mu(x)$  é a densidade de matéria no espaço,  $k$  é uma constante e  $\varphi(y)$  é o potencial no ponto  $y$ , portanto, nessas condições o potencial será infinito em cada ponto do espaço, o que é um absurdo. Este problema é contornado se supusermos que a massa do universo se encontra numa certa região limitada, deste modo teremos o potencial bem definido em cada ponto do espaço [Landau].

Além disso, observações mais precisas acerca da órbita do planeta Mercúrio mostraram um movimento de rotação de seu periélio<sup>(1)</sup> que é incompatível com a mecânica clássica e a Relatividade Especial.

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein (1916), lançou um pouco mais de luz no

---

<sup>(1)</sup> periélio é o ponto da órbita mais próximo do seu centro, no caso o Sol.



problema cosmológico, esclarecendo o desvio do periélio de Mercúrio e permitindo geometrias não-euclidianas aos modelos de universo. Um modelo cosmológico relativístico necessariamente satisfaz as equações do campo gravitacional de Einstein; um sistema não-linear de dez equações diferenciais a derivadas parciais [Landau]. Além do problema matemático inerente, a questão central da cosmologia relativista é determinar a distribuição de massa no universo, que não foi devidamente respondida pelas observações astronômicas.

Não obstante, vários modelos de universo têm sido propostos admitindo o princípio cosmológico o qual impõem condições de isotropia ao espaço e à distribuição de matéria em escala cosmológica. O universo cilíndrico de Einstein (1917) foi o primeiro universo relativístico obtido, porém, trata-se de um universo estático incompatível com o efeito Hubble. Cerca de dois meses após, de-Sitter publicou seu modelo de universo [Merleau-Ponty]. O universo dessiteriano está em expansão, portanto, compatível com o efeito Hubble. Entretanto, é desprovido de matéria [Arcidiacono (a)], o que poderia invalidar sua utilização. Contudo, conforme os trabalhos de Arcidiacono citado nas referências, o universo dessiteriano apresenta boa compatibilidade com as observações atuais.

Na década de cinquenta Fantappié propôs uma forma alternativa de se estudar os modelos cosmológicos independente da Teoria da Relatividade Geral, via teoria de grupos, estendendo à física o "*Erlangen Program*" de F. Klein (1872). Fantappié observou que a um dado grupo contínuo de transformações está associado um certo modelo de universo físico. Assim, por exemplo, ao grupo de Galilei temos associada a mecânica clássica; ao grupo de Poincaré, do qual o grupo de Galilei é um caso limite, quando a velocidade da luz é considerada infinita, corresponde a Relatividade Especial, ambos formados por dez parâmetros.

Fantappié demonstrou que o grupo de isometrias do universo de de-Sitter, o grupo de Fantappié, formado por dez parâmetros contém o grupo de Poincaré como um caso limite quando consideramos o raio do universo dessiteriano infinito, e ainda; que nenhum outro grupo a dez parâmetros associado a um universo quadridimensional pode contê-lo como caso limite. Assim, o grupo de Fantappié generaliza de forma única a Teoria da Relatividade Especial ao universo dessiteriano, dando origem a Relatividade Especial Projetiva, designada pela suas iniciais R.E.P., [Arcidiacono (a) e (b)].

Apresentamos neste capítulo, o estudo do universo de de-Sitter e do grupo de Fantappié. No §2 consideraremos o universo dessiteriano através da representação projetiva de Castelnuovo, obteremos sua métrica e analisaremos um pouco da sua geometria espacial e da sua escala temporal. Veremos que quando o raio do universo é infinito obtemos a métrica de Minkowski.

No §3 consideraremos o grupo de Fantappié associado à representação de Castelnuovo. Obteremos os seus dez parâmetros, veremos que, conforme ocorre com a métrica, o grupo de Fantappié contém o grupo de Poincaré como um caso limite quando o raio do universo é infinito, discutiremos também duas de suas consequências físicas.

## §2. O UNIVERSO DE DE-SITTER-CASTELNUOVO

O universo de de-Sitter corresponde a um modelo cosmológico com curvatura espacial constante positiva e pode ser visualizado como uma pseudo-esfera num espaço de Minkowski pentadimensional  $\mathbb{R}_4^5$ , portanto, sua topologia é dada por  $S^3 \times \mathbb{R}$ , onde  $S^3$  é a esfera em  $\mathbb{R}^4$ , [Hawking].

Denotando as coordenadas de  $\mathbb{R}_4^5$  por  $y_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , sua métrica é dada por:

$$ds^2 = dy_0^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 - dy_4^2 \quad (1.1)$$

Assim, o universo de de-Sitter que, sem perda de generalidade, suporemos centrado na origem, é dado pela equação

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = R^2 \quad (1.2)$$

onde  $R$  é o raio do universo.

Evidentemente o grupo de isometrias no universo dessiteriano é constituído pelas pseudo-rotações em  $\mathbb{R}_4^5$  com determinante mais um.

O universo de de-Sitter tem o inconveniente de não ser chato, isso dificulta a comparação com o espaço-tempo de Minkowski. Dentre as inúmeras representações que se poderia adotar, a mais natural conforme observou Arcidiacono [Arcidiacono (a)], é aquela introduzida por Castelnuovo em 1930, embora sem a devida interpretação física. Na representação de Castelnuovo, o universo de de-Sitter é associado às coordenadas projetivas homogêneas do plano projetivo  $P^4$ , e as coordenadas cartesianas da representação de Castelnuovo são dadas pelas coordenadas do plano projetivo não homogêneo tangente à pseudo-esfera dessiteriana em  $(R, 0, 0, 0, 0)$ , conforme Figura 1. Denominaremos de universo de Castelnuovo esta representação projetiva do modelo de de-Sitter.

Denotando as coordenadas cartesianas do universo de Castelnuovo por  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , decorre da geometria projetiva [Birkhoff], as seguintes relações:

$$x_i = R \frac{y_i}{y_0}; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1.3)$$

Substituindo na equação (1.2) obtemos:

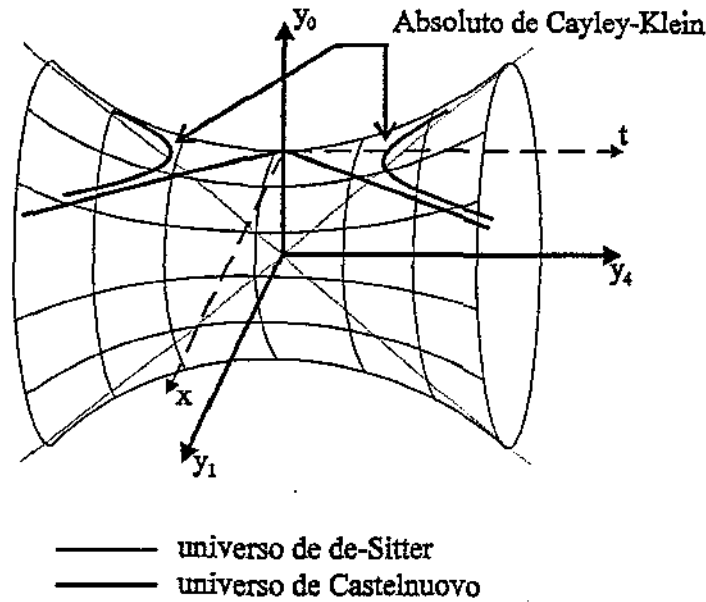
$$y_0 = \frac{R}{A} \quad (1.4)$$

$$\text{onde } A^2 = 1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}{R^2}. \quad (1.4.a)$$

A equação  $A^2 = 0$  é conhecida como quádrlica absoluto de Cayley-Klein. Segue da representação projetiva que o universo de Castelnuovo é constituído pelos pontos externos à quádrlica absoluto, ou seja, pelos pontos  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , tais que  $A^2 \geq 0$ , veja Figura

1, logo a coordenada associada a parte temporal  $x_4$  é limitada ao intervalo  $[-R^2; +R^2]$ , enquanto as coordenadas espaciais  $x_1, x_2, x_3$  são ilimitadas <sup>(1)</sup>.

Como na geometria projetiva identificamos os pontos antipodais a um determinado plano, devemos restringir a representação de Castelnuovo a meia pseudo-esfera  $y_0 \geq 0$ .



### O universo de de-Sitter e a representação de Castelnuovo

FIGURA 1

Utilizando as equações (1.3) e (1.4) temos a relação entre as coordenadas do universo de de-Sitter e as do universo de Castelnuovo

$$\begin{cases} y_i = \frac{x_i}{A}; & i = 1, 2, 3, 4 \\ y_0 = \frac{R}{A} \end{cases} \quad (1.5)$$

Antes de prosseguirmos com nossa discussão do universo de de-Sitter-Castenuovo convencionaremos as seguintes notações introduzidas por Einstein, com a intenção de simplificar a escrita das expressões:

<sup>(1)</sup> Admite-se como métrica para um espaço-tempo aquela que tenha assinatura (3, 1), ou seja, três auto-valores positivos e um negativo e mais, o auto-vetor associado ao auto-valor negativo corresponde a coordenada temporal.

- i) A coordenada  $y_4$  será considerada imaginária, ou seja,  $y_4 \rightarrow iy_4$ .
- ii) Usaremos indistintamente índices superiores e inferiores. Os índices com letras do alfabeto grego serão contados de zero até quatro, enquanto que aqueles com letras latinas serão contados de um até quatro.
- iii) Quando um índice superior e um inferior estiverem denotados pela mesma letra admitiremos sua soma.

Nessas condições a equação (1.1) é escrita da seguinte forma:

$$ds^2 = dy_\alpha dy^\alpha \quad (1.1.a)$$

e, como  $x_4 \rightarrow ix_4$ , temos a equação (1.4.a) escrita como:

$$A^2 = 1 + \frac{x_i x^i}{R^2}.$$

A partir das equações (1.5), resulta que

$$dy_i = \frac{x_i dy_0 + y_0 dx_i}{R}.$$

Substituindo na equação (1.1.a) e simplificando, obtemos a métrica do universo de Castelnuovo

$$ds^2 = A^{-4} \left\{ A^2 \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{R^2} \right\} dx^i dx^j \quad (1.6)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $A^2$  é dada acima.

Quando  $R \rightarrow \infty$ , temos  $A^2 \rightarrow 1$  e a métrica de Castelnuovo torna-se a métrica de Minkowski, isso deve se repetir no grupo de isometrias, ou seja, o grupo das isometrias do universo de Castelnuovo, denominado grupo de Fantappiè, deve conter o grupo de Poincaré como um caso limite quando  $R \rightarrow \infty$ ; veremos no próximo parágrafo que de fato isto ocorre.

Uma questão importante é a escala temporal e a geometria espacial para o universo de Castelnuovo. De modo geral [Landau], dada uma métrica.

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

onde  $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ , de um determinado espaço-tempo, no caso a equação (1.6), a escala temporal para um certo observador é determinada pelo seu tempo próprio, isto é, o tempo

medido em relação ao referencial onde o observador esteja em repouso. Denotando-o por  $\tau$ , temos:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{44}} dx_4; \quad c \text{ é a velocidade da luz}$$

assim o tempo próprio de um certo observador no universo de Castelnuovo é dado por:

$$d\tau = \frac{R}{c} \frac{\sqrt{R^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{R^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2} dx_4$$

Integrando esta expressão obtemos:

$$\tau = \frac{R}{2c} \log \frac{\sqrt{R^2 + \rho^2} + x_4}{\sqrt{R^2 + \rho^2} - x_4} \quad \text{onde: } \rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

O elemento métrico espacial é dado por:

$$d\ell^2 = \left( g_{ij} - \frac{g_{4i}g_{4j}}{g_{44}} \right) dx^j dx^i \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Como ilustração consideremos o comprimento de uma linha reta no universo de Castelnuovo sobre o eixo  $x_1$ , no instante inicial  $x_4 = 0$ , medido a partir da origem, tendo coordenadas 0 e  $\bar{x}_1$ , assim:

$$d\ell = \frac{R^2}{R^2 + x_1^2} dx_1.$$

Integrando segue:

$$\ell = R \arctan \left( \frac{\bar{x}_1}{R} \right).$$

Observe que o comprimento do eixo  $x_1$  é igual ao comprimento de uma meia circunferência de raio  $R$ , conforme Figura 1. Esses resultados estão de acordo com [Arcidiacono (a)], embora sejam obtidos usando o modelo da geometria hiperbólica de F. Klein para o universo de Castelnuovo.

Para concluir, é evidente que a geometria espacial do universo de Castelnuovo não é euclidiana, porém fica completamente determinada através do seu elemento métrico espacial.

### §3. O GRUPO DE FANTAPPIÉ

O grupo de Fantappié é o grupo das isometrias do universo de de-Sitter-Castelnuovo e conforme foi dito na introdução deste capítulo constitui uma forma original de estender a Teoria da Relatividade Especial ao universo dessiteriano resultando na R.E.P. .

Sabemos que o grupo das isometrias de uma pseudo-esfera num espaço de Minkowski  $n$ -dimensional  $R_{(p,q)}^n$ ,  $p + q = n$ , consiste do grupo ortogonal  $O(p, q)$ , ou seja, das pseudo-rotações em  $R_{(p,q)}^n$  com determinante mais um, [Dubrovin]. Logo o grupo de Fantappié é isomorfo ao grupo das pseudo-rotações em  $R_4^5$ , o grupo  $O(4, 1)$ , tendo portanto dez parâmetros. Nosso objetivo é encontrar sua expressão na representação projetiva de Castelnuovo.

Utilizando a seguinte convenção:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

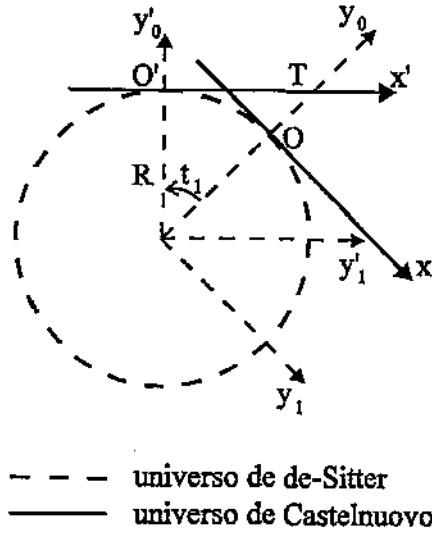
começamos por discutir os três seguintes casos bidimensionais com um único parâmetro. O caso geral a três parâmetros, será obtido pela multiplicação dessas transformações simples.

Nesses termos, considere dois observadores 0 e 0' e seus respectivos referenciais  $k$  e  $k'$  nos seguintes casos:

#### i) *Translação Espacial.*

Sejam 0 e 0' num mesmo instante de tempo e em repouso relativo sendo que 0 está separado de 0' por uma distância  $T$  ao longo do eixo  $x'$ , conforme Figura 2. A transformação do referencial  $k$  em  $k'$  é então, em coordenadas projetivas homogêneas

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_0 \cos t_1 - y_1 \operatorname{sen} t_1 \\ y'_1 &= y_0 \operatorname{sen} t_1 + y_1 \cos t_1 \end{aligned}$$



Translação espacial

FIGURA 2

Tomando  $\alpha = tgt_1 = T/R$  como sugerido pela Figura 2 e passando para as coordenadas cartesianas no universo de Castelnovo, através das equações (1.5), temos:

$$(x', t') = \pi_1(x, t) = \left( \frac{x + T}{1 - \alpha x/R} ; \frac{t\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha x/R} \right) \quad (1.7)$$

Observe que quando  $R \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  e temos:

$$x' = x + T ; \quad t' = t$$

que corresponde a translação espacial ordinária.

## ii) *Translação Temporal.*

Considere  $O$  e  $O'$  na mesma posição do espaço, com  $O'$  separado de  $O$  por um intervalo de tempo  $T_0$ .

De forma análoga temos:

$$(x', t') = \pi_2(x, t) = \left( \frac{x\sqrt{1-\gamma^2}}{1+\gamma t/t_0} ; \frac{t+T_0}{1+\gamma t/t_0} \right) \quad (1.8)$$

onde  $t_0 = R/c$ ,  $\gamma = T_0/t_0$  e  $c$  é a velocidade da luz.

Novamente, quando  $R \rightarrow \infty$  obtemos a translação temporal ordinária, ou seja:

$$x' = x \quad , \quad t' = t + T_0.$$

### iii) *Deslocamento Inercial.*

Sejam  $0$  e  $0'$  na origem de seus referenciais, com  $0$  deslocando-se com velocidade constante  $V$  em relação a  $0'$ .

Observando que o plano da pseudo-rotação nas coordenadas projetivas homogêneas é  $(y_1, y_4)$ , segue, de forma análoga aos casos anteriores, que a transformação no universo de Castelnuovo é dada por

$$(x', t') = \pi_3(x, t) = \left( \frac{x + Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \frac{t + Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (1.9)$$

onde  $\beta = V/c$ .

É interessante observar que formalmente  $\pi_3(x, t)$  coincide com a transformação de Lorentz da Teoria da Relatividade Especial, além disso, independe do raio do universo  $R$ .

A inversa das transformações  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , é obtida tomando o inverso aditivo dos parâmetros  $T, T_0, V$ ; o que está de acordo com nossa intuição física. Este resultado pode ser confirmado resolvendo as equações de  $\pi_i$  em relação a  $(x, t)$  ou valendo-se do mesmo raciocínio para obter tais transformações.

A forma mais geral do grupo de Fantappiè em relação as coordenadas projetivas homogêneas é dada por:

$$\begin{aligned} y'_0 &= a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + a_{04}y_4 \\ y'_1 &= a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + a_{14}y_4 \\ y'_4 &= a_{40}y_0 + a_{41}y_1 + a_{44}y_4 \end{aligned}$$

Introduzindo as coordenadas da representação projetiva de Castelnuovo através da equação (1.3) temos:



$$\begin{aligned}x'_1 &= \frac{Ra_{11}x_1 + Ra_{14}x_4 + R^2a_{10}}{a_{01}x_1 + a_{04}x_4 + Ra_{00}} \\x'_4 &= \frac{Ra_{41}x_1 + Ra_{44}x_4 + R^2a_{40}}{a_{01}x_1 + a_{04}x_4 + Ra_{00}}\end{aligned}\quad (1.10)$$

Considerando o movimento da origem do referencial  $k = (x_1, x_4)$ , ou seja,  $x_1 = 0$ , e eliminando a variável temporal  $x_4$  temos:

$$x'_1 = \frac{a_{10}a_{04} - a_{14}a_{00}}{a_{04}a_{40} - a_{00}a_{44}}x'_4 + R \frac{a_{14}a_{40} - a_{10}a_{44}}{a_{04}a_{40} - a_{00}a_{44}}$$

Observando que  $x'_4 = ict'$ , é evidente que a velocidade do referencial  $k = (x_1, x_4)$  em relação a  $k' = (x'_1, x'_4)$  é dada por:

$$V = ic \frac{a_{10}a_{04} - a_{14}a_{00}}{a_{00}a_{40} - a_{00}a_{44}}. \quad (1.11.a)$$

Tomando  $x_1 = x_4 = 0$  na equação (1.10) temos:

$$x'_1 = \frac{Ra_{10}}{a_{00}} \quad \text{e} \quad x'_4 = \frac{Ra_{40}}{a_{00}}$$

Está claro que estes serão os parâmetros  $T$  e  $ic T_0$  de translação espacial e temporal, respectivamente, logo:

$$\alpha = \frac{T}{R} = \frac{a_{10}}{a_{00}} \quad ; \quad i\gamma = i \frac{T_0}{t_0} = \frac{a_{40}}{a_{00}} \quad (1.11.b)$$

A transformação do grupo de Fantappiè a três parâmetros é obtida pela multiplicação das transformações simples  $\pi_i$ . Por serem pseudo-rotações em planos distintos estas não comutam, logo devemos fixar uma certa sequência para uma transformação a mais de um parâmetro.

Admitiremos como transformação a três parâmetros a seguinte sequência:

$$(x', t') = \pi(x, t) = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3(x, t)$$

Valendo-se das relações (1.11a e 1.11b) para os parâmetros de cada transformação obtemos a transformação acima efetuando a seguinte correção nos parâmetros:

$$\alpha' = \alpha \quad ; \quad \gamma' = \frac{\gamma}{a} \quad ; \quad \beta' = \frac{A\beta}{a^2 - \alpha\gamma\beta}$$

onde:  $a^2 = 1 + \alpha^2$  ;  $A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2$ .

Note que os parâmetros  $\gamma'$  e  $\beta'$  são medidos em relação a referenciais que foram transformados por  $\pi_2$  e  $\pi_3$  respectivamente, pois, foi desta forma que tais transformações foram definidas, enquanto que  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  são medidos em relação ao referencial transformado por  $\pi_1$ .

Efetuada os cálculos obtemos:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{Ax + [\beta + \gamma(\alpha - \beta\gamma)]ct + BT}{A(\gamma\beta - \alpha)x/R + (\gamma - \alpha\beta)t/t_0 + B} \\ t' &= \frac{A\beta x/c + [1 + \alpha(\alpha - \beta\gamma)]t + BT_0}{A(\gamma\beta - \alpha)x/R + (\gamma - \alpha\beta)t/t_0 + B} \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde  $A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2$  e  $B^2 = 1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2$ .

Quando  $R \rightarrow \infty$  temos  $A^2 \rightarrow 1$ ,  $B^2 \rightarrow 1 - \beta^2$  e a transformação acima se reduz a

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} + T \\ t' &= \frac{t + Vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + T_0 \end{aligned}$$

que corresponde a transformação do grupo de Poincaré. Assim, mostramos que o grupo de Fantappiè contém o grupo de Poincaré como um caso limite quando  $R \rightarrow \infty$ , conforme havíamos mencionado anteriormente.

Para que tenhamos  $(x', t')$  reais nas equações (1.12) necessariamente devemos ter:

i)  $A^2 \geq 0$ .

Isto implica que  $(T, T_0)$  é externo a quádrlica absoluto de Cayley-Klein, conforme já observamos.

ii)  $B^2 \geq 0$ .

Dessa condição segue:

$$-c \frac{\alpha\gamma + A}{1 - \gamma^2} \leq V \leq c \frac{A - \alpha\gamma}{1 - \gamma^2}$$

que generaliza a condição  $-c \leq V \leq c$  da Relatividade Especial.

Poderíamos ter tomado outra sequência para obter a transformação do grupo de Fantappiè a três parâmetros. Por exemplo, a seguinte transformação:

$$(x', t') = \pi_2 \cdot \pi_1(x, t) = \left( \frac{b^2 x + bT}{\alpha x/R + At/t_0 + b} ; \frac{x/c + At + bT_0}{\alpha x/R + At/t_0 + b} \right)$$

onde  $b^2 = 1 - \gamma^2$ .

Em virtude das equações (1.11a e 1.11b) temos uma velocidade residual dependente dos parâmetros  $T$  e  $T_0$ , ou seja:

$$V = c \frac{\alpha \gamma}{1 + \gamma^2} \neq 0$$

que limita sua aplicação física, porém, quando  $R \rightarrow \infty$  temos:

$$x' = x + T ; \quad t' = t + T_0 ; \quad V = 0$$

Ocupemo-nos com o grupo de Fantappiè no caso geral do universo de Castelnuovo quadridimensional, nos seguintes casos:

i) *Translação Espacial.*

Do mesmo modo que para o caso bidimensional visto anteriormente, para uma translação ao longo do eixo  $x$ , temos:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + T}{1 - \alpha x/R} & z' &= \frac{z \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha x/R} \\ y' &= \frac{y \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha x/R} & t' &= \frac{t \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha x/R} \end{aligned}$$

onde  $\alpha = T/R$ .

Observe que somente a componente paralela à translação, no caso, a componente  $x$ , é envolvida na transformação acima. Assim para uma translação espacial com três parâmetros  $T = (T_1, T_2, T_3)$ , podemos separar o vetor  $x = (x_1, x_2, x_3)$  numa parte  $x_{||}$  paralela a  $T$  e numa parte  $x_{\perp}$  perpendicular a  $T$ , donde segue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_{\parallel} &= \frac{\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{T}}{1 - \langle \alpha, \mathbf{x}_{\parallel} \rangle / R}; & \mathbf{x}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{x}_{\perp} \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \langle \alpha, \mathbf{x}_{\parallel} \rangle / R} \\ t' &= \frac{t \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \langle \alpha, \mathbf{x}_{\parallel} \rangle / R} \end{aligned}$$

onde  $\langle , \rangle$  é o produto interno euclidiano de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\alpha = T/R$  e  $\alpha^2 = \alpha^i \alpha_i$ .

Notando que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$ , temos  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{\parallel} + \mathbf{x}'_{\perp}$ . Tomando  $A^2 = 1 + \alpha^2$ , podemos escrever as equações anteriores como:

$$\begin{aligned} x'_j &= \frac{Ax_j + T_j[1 - (x_i T^i / R^2) / (1 + A)]}{1 + T_i x^i / R^2} \\ t' &= \frac{At}{1 + T_i x^i / R^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde a somatória implícita é de um até três.

## ii) *Deslocamento Inercial*

Suponhamos as mesmas condições como no caso bidimensional, com  $0'$  deslocando-se com velocidade constante  $V = (V_1, V_2, V_3)$  em relação ao observador  $0$ . As mesmas observações do caso anterior se aplicam aqui sem nenhuma restrição, assim a transformação do grupo de Fantappié pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_{\parallel} &= \frac{\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{V}t}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & \mathbf{x}'_{\perp} &= \mathbf{x}_{\perp} \\ t' &= \frac{t + \langle \mathbf{V}, \mathbf{x}_{\parallel} \rangle / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

onde:  $\beta = V/c$  e  $\beta^2 = \beta^i \beta_i$ .

Escrevendo  $C^2 = 1 - \beta^2$ , essas relações são expressas por

$$\begin{aligned}x'_j &= \frac{1}{C} \left\{ x_j + V_j \left[ t + (x^i V_i)/c^2 (1 + C) \right] \right\} \\t' &= \frac{1}{C} \left\{ t + (x^i V_i)/c^2 \right\}\end{aligned}\tag{1.14}$$

### iii) *Rotação Espacial.*

Considere dois observadores 0 e 0' na origem de seus referenciais e em repouso relativo, sendo que o plano  $(x_1, x_2)$  está rodado de um ângulo  $\theta$  em relação a  $(x'_1, x'_2)$  e  $x_3$  coincidindo com  $x'_3$ . Evidentemente as transformações do grupo de Fantappiè referente a este movimento serão dadas por expressões formalmente iguais às rotações euclidianas, assim tomando  $\theta_1 = \cos \theta$  temos:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \theta_1 x_1 - \sqrt{1 - \theta_1^2} x_2 \\x'_2 &= \sqrt{1 - \theta_1^2} x_1 + \theta_1 x_2 \\x'_3 &= x_3 \\t' &= t.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Deste modo, obtemos finalmente os dez parâmetros do grupo de Fantappiè na representação projetiva de Castelnuovo, sendo três de translação espacial  $(T_1, T_2, T_3)$ , um de translação temporal  $(T_0)$ , três de deslocamento inercial  $(V_1, V_2, V_3)$  e três ângulos de rotação  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , exatamente como no grupo de Poincaré.

Algumas consequências físicas interessantes podem ser obtidas a partir do grupo de Fantappiè. Examinaremos algumas dessas consequências à parte no Apêndice.

## CAPÍTULO II

### A EQUAÇÃO DE LAPLACE PROJETIVA

#### §1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo obteremos a equação diferencial parcial (E.D.P.) satisfeita pelo potencial escalar no universo de de-Sitter com a representação de Castelnuovo. Tendo em vista o caráter projetivo desta representação, esta equação será chamada de *Equação de Laplace Projetiva*.

Antes, porém, no §2 examinaremos as E.D.P's lineares de segunda ordem do tipo elíptico. Daremos uma definição para esse tipo de equação, demonstraremos dois teoremas importantes, os Princípios do Máximo Fraco e Forte, de onde decorre a unicidade para o problema de Dirichlet para regiões limitadas e não limitadas, respectivamente.

No §3 obteremos a *Equação de Laplace Projetiva* eliminando a dependência temporal da equação de D' Alembert projetiva. Aplicando os resultados do §2 discute-se a unicidade do problema de Dirichlet e o problema do potencial definido em todo o espaço, chamado problema no infinito, ao qual impõe-se uma condição de decaimento da solução no infinito. Examinaremos suas transformações invariantes e veremos que, como seu análogo clássico, trata-se de uma E.D.P. elíptica.

#### §2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES ELÍPTICAS

Consideraremos as E.D.P's do tipo elípticas definidas num aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$  que, a menos de menção em contrário será considerado limitado, indicaremos por  $\partial\Omega$  sua fronteira, por  $\bar{\Omega}$  seu fecho, por  $B_R(y)$  a bola aberta euclidiana de raio  $R$  centrada em  $y$ , e por  $\|x\|$  a norma euclidiana do vetor  $x$ , assim  $B_R(y)$  é o conjunto formado pelos pontos  $x$ , tais que,  $\|x - y\| < R$ .

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto e não vazio e  $L$  um operador diferencial parcial linear de segunda ordem

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

onde  $a_{ij}(x)$ ,  $b_i(x)$  e  $c(x)$  são funções reais definidas em  $\Omega$  e  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ .

Diremos que  $L$  é do tipo elíptico em  $\Omega$  se a forma quadrática associada à matriz  $[a_{ij}(x)]$  for positiva para todo  $x \in \Omega$ , isto é, se existir uma constante  $\zeta > 0$  tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \zeta \|\xi\|^2$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ;  $\xi \neq 0$  e todo  $x \in \Omega$ .

De forma mais restrita, se  $\zeta > 0$  for tal que

$$\zeta \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j < \frac{1}{\zeta} \|\xi\|^2$$

$L$  será dito uniformemente elíptico.

Uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem

$$L\{u\} = f$$

será chamada elíptica ou uniformemente elíptica conforme a classificação do operador a ela associado.

Admitiremos que as funções  $a_{ij}(x)$ ,  $b_i(x)$  e  $c(x)$  sejam contínuas em  $\bar{\Omega}$ . Logo se  $\Omega$  for limitado essas funções serão limitadas, e obviamente a elipticidade uniforme é consequência da elipticidade em  $\Omega$ .

A constante  $\zeta$  é chamada constante de elipticidade da equação. Obviamente se  $\lambda$  e  $\Lambda$  são o menor e o maior auto-valor de  $[a_{ij}(x)]$  respectivamente, podemos tomar  $\zeta = \min\{\lambda, \Lambda^{-1}\}$ .

Sejam  $\Omega$  e  $\Omega'$  abertos do  $\mathbb{R}^n$  e  $y = y(x)$ ,  $y(\Omega) \rightarrow \Omega'$  uma mudança de variável de classe  $C^1$ . Nesta nova variável a matriz da forma quadrática associada à parte principal da E.D.P.  $L\{u\} = f$  é dada por:  $[a_{ij}(y)] = J^T[a_{ij}(x)]J$ , onde  $J$  é a matriz jacobiana de  $y(x)$  e  $J^T$  sua transposta. Se o determinante jacobiano não se anular, a mudança de variável preserva a elipticidade da E.D.P., ficando assim bem definida.

Uma propriedade importante das equações elípticas de segunda ordem é o chamado Princípio Fraco do Máximo, contido no seguinte:

**TEOREMA 1.** *Princípio Fraco do Máximo.* Seja  $L$  elíptico em um aberto  $\Omega$ , se

$$L\{u\} \geq 0 (\leq 0), \quad c(x) \equiv 0 \quad \text{em } \Omega$$

para  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , então o máximo (mínimo) de  $u$  em  $\bar{\Omega}$  se encontra na fronteira de  $\Omega$ , isto é,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

**PROVA:** Primeiro observamos que se  $L\{u\} > 0$  em  $\Omega$ , então  $u(x)$  não pode assumir seu máximo num ponto interior  $x_0 \in \Omega$ . De fato, se  $u(x_0)$  é um máximo e  $x_0$  se encontra no interior de  $\Omega$ , temos  $\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i} = 0$  e a forma quadrática hessiana  $\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$  negativa. Porém, por hipótese, a forma quadrática associada à matriz  $[a_{ij}(x_0)]$  é positiva, consequentemente temos:

$$L\{u(x_0)\} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} < 0.$$

Logo  $u(x)$  não pode assumir um máximo interior a  $\Omega$ .

Como  $b_i(x)$  é limitada em  $\Omega$ , temos uma constante  $b_0 > 0$  tal que  $\frac{|b_i|}{\zeta} \leq b_0$ , obviamente  $a_{11} \geq \zeta$ , logo existe uma constante  $\gamma$  suficientemente grande para a qual:

$$L\{e^{\gamma x_1}\} = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1) e^{\gamma x_1} \geq \zeta(\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1} > 0$$

Para  $\varepsilon > 0$  temos:

$$L\{u + \varepsilon e^{\gamma x_1}\} > 0 \text{ em } \Omega,$$

segue então

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos, evidentemente,  $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ , como afirmado no teorema, a desigualdade contrária é obtida tomando  $-u(x)$  acima.  $\square$

Suponhamos agora que  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$ . Considerando o subconjunto  $\Omega^+ \subset \Omega$  no qual  $u(x) > 0$ , vemos que se  $L\{u\} \geq 0$  em  $\Omega$ , então  $\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} u \geq -cu \geq 0$  em  $\Omega^+$ , decorre do teorema anterior que o máximo de  $u$  em  $\Omega^+$  se encontra em  $\partial\Omega^+$  e, portanto, em  $\partial\Omega$ . Denotando

$$u^+ = \max(u, 0) \quad ; \quad u^- = \min(u, 0)$$

obtemos o seguinte:

**COROLÁRIO 1.:** Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, exceto  $c(x) \leq 0$ , temos:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$



Se  $L\{u\} = 0$  então:

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Uma consequência imediata do corolário acima é a unicidade do problema de Dirichlet para regiões limitadas quando  $c \leq 0$ .

A condição  $c \leq 0$  não pode ser enfraquecida para permitir  $c(x) > 0$ . Um exemplo familiar é a existência de auto-valores positivos para a equação de Laplace, veja [Tijonov].

Para a unicidade do problema infinito precisamos do caso mais geral devido a E. Hopf, [Gilbarg], chamado Princípio Forte do Máximo, que provaremos a partir do seguinte resultado:

“Dizemos que um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  satisfaz uma condição esférica interior em  $x_0 \in \partial\Omega$  se existe uma bola  $B \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ ”.

**LEMA 1.:** Supondo  $L$  uniformemente elíptico,  $c(x) \equiv 0$  e  $L\{u\} \geq 0$  em  $\Omega$ , seja  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que:

- i)  $u(x)$  é contínua em  $x_0$ ;
- ii)  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , observe que isto é garantido pelo teorema anterior;
- iii)  $\partial\Omega$  satisfaz uma condição esférica interior em  $x_0$ .

Então a derivada normal exterior de  $u$  em  $x_0$ , se existir, satisfaz a desigualdade estrita

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Se  $c(x) \leq 0$  e  $c(x)/\zeta$  é limitado, o mesmo se mantém desde que  $u(x_0) \geq 0$ , e se  $u(x_0) = 0$  obtemos a mesma conclusão independente do sinal de  $c(x)$ .

**PROVA:** Por hipótese, existe uma bola  $B = B_R(y) \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ . Para  $0 < \rho < R$  introduzimos uma função auxiliar  $v$  definida por:

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$$

onde  $r^2 = \|x - y\|^2$  e  $\alpha$  é uma constante a ser determinada.

Temos

$$L\{v\} = e^{-\alpha r^2} \left[ 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha \left( a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_i(x_i - y_i) \right) \right] + cv$$

observando a elipticidade uniforme e valendo-se da desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos escrever

$$L\{v\} \geq e^{-\alpha r^2} [4\alpha^2 \zeta r^2 - 2\alpha(a_{ii} + r\|b\|) + c]$$

Como  $a_{ii}/\zeta$ ;  $\|b\|/\zeta$  e  $c/\zeta$  são limitados, podemos escolher  $\alpha$  suficientemente grande de tal modo que:

$$L\{v\} \geq 0 \text{ em toda região anular } A = B_R(y) - B_\rho(y).$$

Por (ii)  $u(x) - u(x_0) < 0$  em  $\partial B_\rho(y)$ , logo existe uma constante  $\varepsilon > 0$ , tal que:

$$\psi(x) \equiv u(x) - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \text{ em } \partial B_\rho(y).$$

Observe que esta desigualdade é satisfeita em  $\partial B_R(y)$  onde  $v = 0$ , assim temos:

$$L\{\psi\} \geq 0 \text{ em } A \text{ e } \psi(x) \leq 0 \text{ em } \partial A.$$

Aplicando o princípio fraco do máximo (Corolário 1) segue que  $\psi(x) \leq 0$  em todo  $A$ .

Tomando a derivada normal exterior em  $x_0$  temos:  $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon v'(R) \geq 0$ ; logo,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon v'(R) > 0. \quad \square$$

Uma consequência deste lema é a unicidade do problema de Neumann, veja [Gilbarg].

**TEOREMA 2.:** (*Princípio Forte do Máximo*). Seja  $L$  uniformemente elíptico

$$L\{u\} \geq 0 (\leq 0) \quad c(x) \equiv 0$$

em um aberto  $\Omega$  não necessariamente limitado. Então se o máximo (mínimo) de  $u$  se encontra no interior de  $\Omega$ ,  $u$  é uma constante. Se  $c \leq 0$  e  $c/\zeta$  é limitado, então  $u$  não pode assumir um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de  $\Omega$ .

**PROVA:** Supondo o contrário, ou seja,  $u(x)$  não é uma constante e assume seu máximo  $M \geq 0$  no interior de  $\Omega$ , então o conjunto  $\Omega^-$  no qual  $u < M$  satisfaz

$$\Omega^- \subset \Omega \text{ e } \partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Seja  $x_0$  um ponto de  $\Omega^-$ , este está mais próximo de  $\partial\Omega^-$  que  $\partial\Omega$ , e considere a maior bola  $B \subset \Omega^-$  tendo  $x_0$  como centro, veja Figura 3. Então  $u(y) = M$  para algum  $y \in \partial\Omega$



### § 3. A EQUAÇÃO DE LAPLACE PROJETIVA

A equação de D' Alembert é definida para um espaço-tempo com métrica

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

através da seguinte equação, [Landau]

$$\square^* \varphi = \varphi_{;i}^{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = 0$$

onde  $;$  denota a derivada covariante em relação a  $x_i$ ,  $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$  e  $g = \det g_{ij}$ .

Para a métrica (1.6) do universo de Castelnuovo, após efetuar os cálculos obtemos:

$$\square^* \varphi = A^2 \left\{ \square + \frac{1}{R^2} \left[ \sum_{i,j=1}^4 x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right\} \varphi(x) = 0 \quad (2.1)$$

onde  $\square$  é o operador de D' Alembert.

Evidentemente esta equação é invariante pelo grupo de Fantappiè, em particular para as rotações espaciais.

A equação de D' Alembert no universo de Castelnuovo (2.1) pode ainda ser generalizada um pouco mais, conforme [Arcidiacono]. Para isso consideraremos  $\psi(y)$  uma função homogênea<sup>(1)</sup> de grau  $\lambda$  na variável projetiva  $y$ , logo:

$$\left( \frac{R}{y_0} \right)^\lambda \psi(y_0, y_j) = \psi \left( R, \frac{Ry_j}{y_0} \right) \quad j = 1, 2, 3, 4$$

observando as relações (1.3), resulta que

$$R^\lambda \psi(y) = y_0^\lambda \psi(R, x).$$

Derivando esta relação com respeito a  $y_0$  e  $y_k$  obtemos, respectivamente

$$\begin{cases} R^\lambda \frac{\partial}{\partial y_0} \psi(y) = \lambda y_0^{\lambda-1} \psi(R, x) - y_0^{\lambda-1} \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(R, x) \\ R^{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial y_k} \psi(y) = y_0^{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(R, x) \end{cases} \quad (2.2)$$

<sup>(1)</sup> A hipótese de homogeneidade de  $\psi(y)$  é feita para garantir que esteja bem definida quando da passagem das coordenadas cartesianas  $x$  para as coordenadas projetivas homogêneas  $y$  e vice-versa.

Por definição:  $\psi$  é homogênea de grau  $\lambda$ , então:

$$\psi(\alpha y) = \alpha^\lambda \psi(y).$$

Essas relações fornecem a derivada projetiva  $\frac{\partial}{\partial y_i}$  em termos das derivadas cartesianas.

Definimos o d' alembertiano projetivo por:

$$\bar{\square}\psi(y) = \sum_{i=0}^4 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \psi(y).$$

A partir das relações (2.2) obtemos:

$$\begin{cases} R^\lambda \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \psi(y) = \lambda y_0^{\lambda-2} \left\{ \sum_{i,j=1}^4 x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - 2(\lambda-1) \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda(\lambda-1) \right\} \psi(R, x) \\ R^{\lambda-2} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \psi(y) = y_0^{\lambda-2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \psi(R, x) \end{cases}$$

Donde segue o d' alembertiano projetivo em termos das coordenadas cartesianas do plano projetivo  $P^4$

$$\bar{\square}\psi(y) = \left(\frac{y_0}{R}\right)^{\lambda-2} \left\{ \square + \frac{1}{R^2} \left[ \sum_{i,j=1}^4 x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - 2(\lambda-1) \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda(\lambda-1) \right] \right\} \psi(R, x). \quad (2.3)$$

Agora fazendo a restrição das coordenadas projetivas homogêneas ao universo de de-Sitter, ou seja, a pseudo-esfera (1.2), a relação entre as variáveis  $x$  e  $y$  é dada pela equação (1.5), desta forma podemos escrever:

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{R}{A}, \frac{x_i}{A}\right) = A^{-\lambda} \psi(R, x_i)$$

,ou seja,

$$\psi(R, x_i) = A^\lambda \varphi(x)$$

onde  $A$  é dado pela equação (1.4.a).

Substituindo esta relação no d' alembertiano projetivo, a equação de D' Alembert projetiva no universo de Castelnuovo é dada por:

$$A^2 \left\{ \square + \frac{1}{R^2} \left[ \sum_{i,j=1}^4 x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right\} \varphi(x) + \frac{\lambda(\lambda+3)}{R^2} \varphi(x) = 0. \quad (2.4)$$

Quando  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = -3$  obtemos a equação de D' Alembert (2.1). Observe que a equação (2.4) também é invariante pelo grupo de Fantappié.

A equação (2.4) pode ser generalizada para um espaço  $n$ -dimensional, sendo escrita como:

$$A^2 \left\{ \square + \frac{1}{R^2} \left[ \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right\} \varphi(x) + \frac{\lambda(\lambda + n - 1)}{R^2} \varphi(x) = 0 \quad (2.4.a)$$

onde  $\square$  é o operador de D' Alembert  $n$ -dimensional.

Eliminando a dependência temporal da equação de D' Alembert projetiva, obtemos a equação de Laplace projetiva, que será objeto de estudo neste e nos próximos capítulos. Desta forma tomando  $x_4 = ict = 0$  na equação (2.4) a equação de Laplace projetiva é dada por:

$$A^2 \left\{ \Delta + \frac{1}{R^2} \left[ \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right\} \varphi(x) + \frac{\lambda(\lambda + 2)}{R^2} \varphi(x) = 0 \quad (2.5)$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace e  $A^2 = 1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{R^2}$ .

Obviamente, do mesmo modo que para a equação (2.4), as transformações do grupo de Fantappiè que não envolvem a coordenada temporal mantêm a equação (2.5) invariante. Mais explicitamente, a equação de Laplace projetiva é invariante pelas rotações espaciais, assim como pela a translação espacial geral dada pela equação (1.13).

É interessante observar que a equação de Laplace projetiva também é invariante pela troca  $-\lambda \leftrightarrow \lambda + 2$ , como consequência, para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , podemos limitar nosso estudo aos casos  $\lambda \in [-2, 0]$  e  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Veremos agora que a equação de Laplace projetiva é uma E.D.P. do tipo elíptico. De fato, os auto-valores da matriz associada a equação (2.5) são dados pelas raízes da equação algébrica

$$\det[a_{ij}(x) - \zeta \delta_{ij}] = (1 - \zeta)^2 (A^2 - \zeta) = 0$$

onde  $[a_{ij}(x)] = \left[ \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{R^2} \right]$  e  $A^2$  é dado como na equação (2.5).

Logo  $\zeta = (1, 1, A^2)$  e consequentemente a equação de Laplace projetiva é uma equação elíptica em todo o espaço e uniformemente elíptica em domínios limitados.

Fisicamente a solução da equação (2.5) representa o potencial escalar de algum campo. Se considerarmos o potencial definido em todo o espaço, o chamado problema no infinito, é natural considerar que para grandes distâncias o potencial se anule, ou seja, que  $\varphi(x)$  solução da equação (2.5) satisfaça  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ . Nessas condições decorre do Colorário 2 do parágrafo anterior que temos apenas a solução trivial  $\varphi(x) \equiv 0$  para  $\lambda \in [-2, 0]$ .

No próximo capítulo estudaremos em detalhes o problema de Dirichlet para a equação (2.5) no interior da esfera. Pelo Corolário 1 podemos assegurar a unicidade da solução somente quando  $\lambda \in [-2, 0]$ , quando  $\lambda$  é positivo veremos que em geral isto não ocorre.

## CAPÍTULO III

### O PROBLEMA DE DIRICHLET NO INTERIOR DA ESFERA

#### §1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos e discutiremos o problema de Dirichlet para a equação de Laplace projetiva no interior da esfera. Para isso, no §2 introduzimos coordenadas esféricas na equação (2.5), obtendo uma E.D.P. separável nas variáveis angulares e radial. Para esta última obteremos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem dependente de  $\lambda$ , e para a parte angular obteremos sua solução em termos dos harmônicos esféricos clássicos.

No §3 discutiremos a natureza dos pontos singulares da equação radial e a partir disto obteremos sua solução identificando-a com uma equação hipergeométrica.

No §4 consideraremos o problema de Dirichlet para a esfera, exibiremos sua solução em forma de série e analisaremos sua unicidade.

#### §2. A EQUAÇÃO DE LAPLACE PROJETIVA EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Introduzindo coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} Rx_1 &= \rho \operatorname{sen} \theta \cos \phi; \\ Rx_2 &= \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi; \\ Rx_3 &= \rho \cos \theta; \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $\rho > 0$ ,  $0 < \theta < \pi$  e  $0 < \phi < 2\pi$ , a equação (2.5) é escrita como:

$$\left\{ (1 + \rho^2) \left[ \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \varphi + \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \lambda(\lambda + 2) \varphi = 0. \tag{3.2}$$



onde  $\varphi = \varphi(\rho, \theta, \phi)$ .

É evidente que trata-se de uma E.D.P. separável. Escrevendo  $\varphi(\rho, \theta, \phi) = U(\rho)V(\theta, \phi)$ ; obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V + \cotg \theta \frac{\partial}{\partial \theta} V + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} V + \ell(\ell + 1)V = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} U + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} U + \frac{\lambda(\lambda + 2)}{(1 + \rho^2)^2} U - \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2(1 + \rho^2)} U = 0 \quad (3.4)$$

Notando que a equação (3.3) coincide com a parte angular da equação de Laplace clássica, resulta que sua solução regular em  $\theta$  é um múltiplo constante dos harmônicos esféricos  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  [Magnus]. Assim:

$$V(\theta, \phi) = kY_\ell^m(\theta, \phi) = ke^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta) \quad (3.5)$$

onde  $k$  é uma constante,  $P_\ell^m(\cos \theta)$  são os polinômios de Legendre associados;  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; e  $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ .

Decorre ainda, sua invariância por rotações espaciais ordinárias como já havíamos observado.

### §3. A EQUAÇÃO RADIAL

Consideraremos agora a equação radial (3.4). Observe que esta mantém-se invariante pela troca  $-\ell \leftrightarrow \ell + 1$  e  $-\lambda \leftrightarrow \lambda + 2$ , esta última nos permite considerar apenas os casos  $\lambda \in [-2, 0]$  e  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Efetuada a mudança de variável  $\zeta = \frac{1}{\rho}$  a equação (3.4) é escrita como

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} U + \frac{\lambda(\lambda + 2)}{(\zeta^2 + 1)^2} U + \frac{\ell(\ell + 1)}{\zeta^2 + 1} U = 0 \quad (3.6)$$

a qual é regular em  $\zeta = 0$ , o que implica na regularidade no infinito da equação original.

Consequentemente a equação (3.4) possui apenas  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = +i$  e  $\rho_3 = -i$  como pontos singulares regulares <sup>(1)</sup>. Tratando-se de uma equação fuchsiana com três pontos singulares [Sotomayor], sua solução pode ser expressa em termos das funções hipergeométricas.

Introduzindo o símbolo de Riemann para tal equação, temos:

---

<sup>(1)</sup> Dizemos que  $x_0$  é ponto singular regular da equação  $w'' + b_1(x)w' + b_2(x)w = 0$  se  $b_1(x)$  e  $b_2(x)$  forem singulares em  $x = x_0$  e existirem os limites  $b_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)b_1(x)$  e  $b_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 b_2(x)$ .

$$U(\rho) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & +i & -i \\ \ell & -\lambda/2 & -\lambda/2; \rho \\ -\ell-1 & \frac{\lambda+2}{2} & \frac{\lambda+2}{2} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Tomando  $x = \frac{2\rho}{\rho+i} = \frac{2\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \sqrt{\frac{\rho-i}{\rho+i}}$ , temos  $\rho_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ;  $\rho_2 = +i \Leftrightarrow x_2 = 1$ ;  $\rho_3 = -i \Leftrightarrow x_3 = \infty$ . Assim,

$$U(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \ell & -\lambda/2 & -\lambda/2; x \\ -\ell-1 & \frac{\lambda+2}{2} & \frac{\lambda+2}{2} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

que corresponde a uma equação de Riemann.

Fazendo  $U(x) = x^\ell(x-1)^{-\lambda/2}v(x)$  temos:

$$v(x) = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \ell+1; x \\ -2\ell-1 & \lambda+1 & \ell-\lambda \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

que corresponde a uma equação hipergeométrica com parâmetros  $\alpha = \ell+1$ ;  $\beta = \ell-\lambda$  e  $\gamma = 2\ell+2$ . Na sua forma explícita tal equação é escrita como

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}v + [2\ell+2 - (2\ell-\lambda+2)x]\frac{d}{dx}v + (\ell+1)(\ell-\lambda)v = 0. \quad (3.9.a)$$

Escrevendo  $m = \gamma - 1 = 2\ell + 1$  e  $m' = \alpha - 1 = \ell$ , temos  $m > m' \geq 0$  sendo  $m$  e  $m'$  inteiros positivos, como consequência, uma base para a solução da equação (3.9) é dada, [Gradshteyn], pelo par:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= {}_2F_1(\ell+1, \ell-\lambda; 2\ell+2; x) \\ v_2(x) &= x^{-(2\ell+1)} {}_2F_1(-\ell, -\lambda-\ell-1; -2\ell; x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $|x| \leq 1$  e  ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{x^k}{k!}$  é a série hipergeométrica.

Tendo em vista as mudanças nas variáveis dependente e independente, obtemos como base para solução da equação radial (3.4) para  $\rho \in [0, 1/\sqrt{3}]$ :

$$\begin{aligned} u_1(\rho) &= \left( \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{\frac{\ell}{2}} \left( \frac{\rho+i}{\rho-i} \right)^{\frac{\lambda-\ell}{2}} {}_2F_1\left(\ell+1, \ell-\lambda; 2\ell+2; \frac{2\rho}{\rho+i}\right) \\ u_2(\rho) &= \left( \frac{1+\rho^2}{\rho^2} \right)^{\frac{\ell+1}{2}} \left( \frac{\rho+i}{\rho-i} \right)^{\frac{\lambda+\ell+1}{2}} {}_2F_1\left(-\ell, -\lambda-\ell-1; -2\ell; \frac{2\rho}{\rho+i}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Deste modo, a solução geral da equação (3.4) para  $\rho \in [0, 1/\sqrt{3}]$  é dada por:

$$U(\rho) = a u_1(\rho) + b u_2(\rho)$$

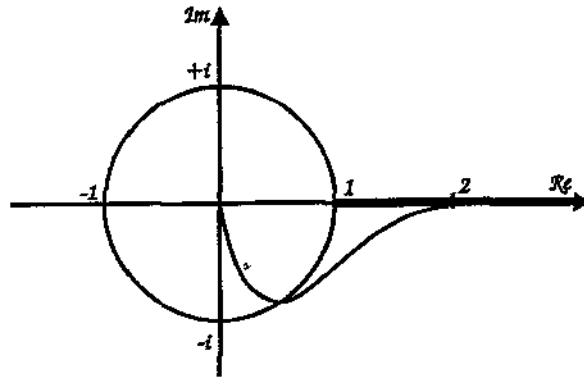
onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias. Como cada função em (3.11) é obtida da outra pela troca  $-\ell \leftrightarrow \ell+1$ , do mesmo modo que a equação (3.4) sua solução geral mantém-se invariante por esta troca.

Nossa intenção agora é estender a solução (3.11) para  $1/\sqrt{3} \leq \rho, \rho \in \mathbb{R}$ . Observando que os coeficientes de uma série hipergeométrica  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  satisfazem a relação de recorrência  $a_0 = 1$ ;  $a_{k+1} = \frac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)(k+\gamma)} a_k$  decorre:

- i)  ${}_2F_1(-\ell, -\lambda-\ell-1; -2\ell; x)$  é um polinômio em  $x$  de grau  $\ell$ , portanto,  $u_2(\rho)$  é um polinômio em  $\sqrt{1+\rho^2}/\rho$  de grau  $\ell+1$ , sendo definido para  $\rho \neq 0$ .
- ii)  ${}_2F_1(\ell+1, \ell-\lambda; 2\ell+2; x)$  é um polinômio em  $x$  se  $\lambda \equiv n$  e  $n \geq \ell, n = 0, 1, 2, \dots$ , cujo grau é  $k = \lambda - \ell$ . Consequentemente neste caso  $u_1(\rho)$  está definido para todo  $\rho \in \mathbb{R}$ .

De acordo com [Gradshteyn], para  $\lambda \neq n$  onde  $n = -2, -1, 0, 1, \dots$  a série hipergeométrica em (3.11) associada a  $u_1(\rho)$  admite prolongamento analítico em todo o plano complexo, exceto quando  $x = \frac{2\rho}{\rho+i} \in \mathbb{R}$  e  $x > 1$ . Entretanto, quando  $\rho$  percorre os reais positivos,  $x$  descreve uma curva  $\gamma$  no plano complexo  $z$ , que intercepta o eixo real só na origem, veja Figura 4, onde a parte em negrito, sobre o eixo real, indica a curva que não

admite o prolongamento analítico. Assim, podemos prolongar  $u_1(\rho)$  analiticamente para  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \rho$  e esta constitui uma solução da equação (3.4).



Convergência de  $u_1(\rho)$  para  $\lambda \neq -2, -1, 0, 1, \dots$

FIGURA 4

Finalmente, para  $\lambda = n, n = -2, -1, 0, \dots, \ell - 1$ , obtemos  $u_1(\rho)$  através da relação de recorrência [Gradshteyn],

$$\begin{aligned} \beta(x-1)_2F_1(\alpha, \beta+1; \gamma; x) &+ (2\beta-\gamma-\beta x+\alpha x)_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) + \\ &+ (\gamma-\beta)_2F_1(\alpha, \beta-1; \gamma; x) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \ell + 1; \quad \beta = \ell - n; \quad \gamma = 2\ell + 2; \quad x = \frac{2\rho}{\rho + i} \\ {}_2F_1(\alpha, -1; \gamma; x) &= 1 - \frac{x}{2}; \quad \text{e} \quad {}_2F_1(\alpha, 0; \gamma; x) = 1. \end{aligned}$$

Segue da relação de recorrência (3.12) que  $u_1(\rho)$  é regular na origem e está definida para todo  $\rho$ .

Assim obtemos  $u_1(\rho)$  e  $u_2(\rho)$  para todo  $\rho$  positivo. E, portanto, a solução geral da equação (3.4) é dada por:

$$U(\rho) = au_1(\rho) + bu_2(\rho) \quad (3.13)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias e  $\rho \in (0, \infty)$ .

Finalmente, indicando  $\bar{u}$  como sendo o complexo conjugado de  $u$ , o par  $\bar{u}_1(\rho)$  e  $\bar{u}_2(\rho)$  também é uma base para a solução geral da equação (3.4), pois, esta tem os coeficientes reais. Disto decorre que  $\bar{u}_1(\rho) = \alpha_1 u_1(\rho)$  e  $\bar{u}_2(\rho) = \alpha_2 u_2(\rho)$ , onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes não nulas a serem determinadas.

Da condição  $\bar{u}_1(\rho) = \alpha_1 u_1(\rho)$  obtemos:

$${}_2F_1\left(\ell + 1, \lambda - \ell; 2\ell + 2; \frac{2\rho}{\rho - i}\right) = \alpha_1 \left(\frac{\rho + i}{\rho - i}\right)^{\lambda - \ell} {}_2F_1\left(\ell + 1, \ell - \lambda; 2\ell + 2; \frac{2\rho}{\rho + i}\right) \quad (3.14)$$

em especial, tomando  $\rho = 0$  temos  $1 = \alpha_1(-1)^{\lambda - \ell}$ , logo uma possibilidade é tomar  $\alpha_1 = (-1)^{\lambda - \ell}$ . Assim, fazendo

$$U_1(\rho) = (-1)^{\frac{\lambda - \ell}{2}} u_1(\rho) = i^{\lambda - \ell} u_1(\rho)$$

resulta que  $U_1(\rho)$  é uma solução real da equação (3.4). De fato,

$$\bar{U}_1(\rho) = (-i)^{\lambda - \ell} \bar{u}_1(\rho) = (-i)^{\lambda - \ell} (-1)^{\lambda - \ell} u_1(\rho) = (-1)^{\frac{\lambda - \ell}{2}} u_1(\rho) = U_1(\rho).$$

Analogamente, verifica-se que  $U_2(\rho) = (-1)^{\frac{\lambda + \ell + 1}{2}} u_2(\rho)$  é uma outra solução real da equação (3.4) linearmente independente a  $U_1(\rho)$ .

Desta forma,

$$U_1(\rho) = (-1)^{\frac{\lambda - \ell}{2}} u_1(\rho) \text{ e } U_2(\rho) = (-1)^{\frac{\lambda + \ell + 1}{2}} u_2(\rho) \quad (3.15)$$

constituem uma base de funções reais para a equação (3.4), portanto

$$U(\rho) = a U_1(\rho) + b U_2(\rho)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais arbitrárias, é sua solução geral.

#### §4. O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A ESFERA

Ocupemo-nos agora do problema de Dirichlet para o interior da esfera, a qual admitiremos centrada na origem. Em virtude da invariância da equação de Laplace projetiva pela translação espacial (1.13) isto não constitui perda de generalidade. Em termos mais precisos nosso problema é da seguinte forma:

“Dados  $\lambda, \zeta \in \mathbb{R}; 0 < \zeta$  e  $-2 \leq \lambda$ , determinar  $\varphi_\lambda(\rho, \theta, \phi)$  solução regular para o interior da esfera de raio  $\zeta$ , da equação (3.2), satisfazendo a condição de contorno:

$$\varphi_\lambda(\zeta, \theta, \phi) = f(\theta, \phi), \quad f(\theta, \phi) \in C^2(\theta, \phi) \quad (3.16)$$

A partir das equações (3.5) e (3.15) e da regularidade de  $\varphi_\lambda(\rho, \theta, \phi)$  no interior da esfera, temos:

$$\varphi_\lambda(\rho, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell,m} U_1(\rho) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

onde  $\alpha_{\ell,m}$  são constantes a serem determinadas.

Valendo-se da ortonormalização dos harmônicos esféricos, denotando  $a_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) Y_\ell^m(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta d\phi$  os coeficientes de Fourier de  $f(\theta, \phi)$ , segue da condição de contorno (3.16) que  $\alpha_{\ell,m} = a_{\ell,m} U_1(\zeta)$ , portanto, a solução do problema de Dirichlet é dado por:

$$\varphi_\lambda(\rho, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell,m} \frac{U_1(\rho)}{U_1(\zeta)} Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (3.17)$$

Para  $-2 \leq \lambda \leq 0$  vimos no §3 do capítulo anterior que  $\varphi_\lambda(\rho, \theta, \phi)$  é única, isso implica em particular que  $U_1(\rho) = 0$  não admite raiz real.

Entretanto, para  $0 < \lambda$  pode ocorrer de  $U_1(\zeta) = 0$  para certos valores de  $\ell = \ell_i$ , onde  $i$  é um índice finito [Gilbarg]. Assim sendo,  $\lambda$  pode ser considerado como auto-valor e o conjunto das funções  $\alpha U_1(\rho) Y_{\ell_i}^m(\theta, \phi)$ , onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária não nula,  $i = 0, 1, \dots, k$  e  $m = -\ell_i, -\ell_i + 1, \dots, \ell_i - 1, \ell_i$ , são as auto-funções da equação (3.2) associados a condição de contorno  $\varphi_\lambda(\zeta, \theta, \phi) = 0$ .

No caso de  $\lambda$  ser auto-valor, devemos ter  $a_{\ell_i,m} = 0$  para que a solução (3.17) seja regular, dito de outra forma, devemos ter  $f(\theta, \phi)$  ortogonal a parte angular das auto-funções associadas a  $\lambda$ , isto é, a  $Y_{\ell_i}^m(\theta, \phi)$ . Além disso, podemos somar a esta qualquer combinação linear das respectivas auto-funções, logo, não existe unicidade da solução. Obviamente, vale a recíproca deste resultado. Por outro lado, se  $U_1(\zeta) \neq 0$  para todo  $\ell$ ,  $\lambda$  não é auto-valor e (3.17) constitui a única solução do problema de Dirichlet acima.

Essa é a chamada alternativa de Fredholm para a equação de Laplace projetiva [Tijonov].

## CAPÍTULO IV

### SOBRE A SOLUÇÃO POLINOMIAL DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PROJETIVA

#### §1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior mostramos que em certos casos obtínhamos solução polinomial para a parte radial da equação de Laplace projetiva. Neste capítulo consideraremos em especial esses polinômios e como uma aplicação, a generalização da lei da gravitação de Newton ao universo de Castelnuovo.

No §2 obteremos explicitamente esses polinômios, na variável radial, denominados  $E_n^\ell(\rho)$  e  $G_n^\ell(\rho)$ , através do método de Fröbenius aplicado à equação radial (3.4).

No §3 discutiremos sua conexão com os polinômios de Gegenbauer e as funções  $U_1(\rho)$  e  $U_2(\rho)$ , estas últimas obtidas no capítulo anterior.

No §4 apresentaremos um estudo desses polinômios, e alguns resultados especiais quando temos simetria esférica.

Finalmente no §5 consideraremos uma aplicação dos polinômios  $E_n^0(\rho)$  e  $G_n^0(\rho)$  à generalização da lei de gravitação newtoniana ao universo de Castelnuovo.

#### §2. A SOLUÇÃO POLINOMIAL DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PROJETIVA

Fazendo a mudança na variável dependente  $U(\rho) = \frac{\psi(\rho)}{\rho^{\ell+1}(1+\rho^2)^{\lambda/2}}$  na equação radial (3.4) obtemos a seguinte equação:

$$(1+\rho^2)\frac{d^2}{d\rho^2}\psi - 2\left[(\lambda+\ell)\rho + \frac{\ell}{\rho}\right]\frac{d}{d\rho}\psi + (\lambda+\ell)(\lambda+\ell+1)\psi = 0 \quad (4.1)$$

onde  $\psi = \psi(\rho)$ .

Procurando o par de soluções linearmente independentes na forma de série, pelo método de Fröbenius

$$\psi_1 = \rho^{2\ell+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \quad \text{e} \quad \psi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \rho^k$$

obtemos as seguintes fórmulas de recorrências

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= - \frac{(\lambda - \ell - k)(\lambda - \ell - k - 1)}{(k+2)(k+2\ell+3)} a_k \\ b_{k+2} &= - \frac{(\lambda + \ell + 1 - k)(\lambda + \ell - k)}{(k+2)(k-2\ell+1)} b_k \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $k = 0, 2, 4, 6, \dots$ .

Utilizando o critério da razão para convergência das séries resulta que  $\psi_1(\rho)$  e  $\psi_2(\rho)$  convergem no intervalo aberto  $I = (-1, +1)$ . Entretanto, tomando  $\lambda$  um inteiro positivo,  $\lambda \equiv n$ , o coeficiente  $a_{k+2}$  se anula para  $k = n - \ell - 1$  ou  $k = n - \ell$ , enquanto  $b_{k+2}$ , para  $k = n + \ell + 1$  ou  $k = n + \ell$ , logo tanto  $\psi_1(\rho)$  como  $\psi_2(\rho)$  são polinômios em  $\rho$ , sendo o primeiro definido apenas para  $n \geq \ell$  e ambos definidos para  $\rho \in \mathbb{R}$ .

Fazendo  $k = 2m, m = 0, 1, 2, \dots$  as fórmulas de recorrências (4.2) podem ser escritas, para  $\lambda \equiv n$ , na seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{2m} &= (-1)^m \frac{(n - \ell)! \Gamma(\ell + 3/2)}{(n - \ell - 2m)! \Gamma(\ell + m + 3/2) m! 2^{2m}} a_0 \\ b_{2m} &= (-1)^m \frac{(n + \ell + 1)! \Gamma(1/2 - \ell)}{(n + \ell + 1 - 2m)! \Gamma(1/2 - \ell + m) m! 2^{2m}} b_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $a_0$  e  $b_0$  são constantes não nulas <sup>1</sup>.

Tomando  $a_0 = n - \ell + 1$  e  $b_0 = 1$ , resulta que:

$$\psi_1(\rho) \equiv E_n^\ell(\rho) = \rho^{2\ell+1} \sum_{m=0}^{[\frac{n-\ell}{2}]} (-1)^m \frac{(n - \ell + 1)! \Gamma(\ell + 3/2)}{(n - \ell - 2m)! \Gamma(\ell + m + 3/2) m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} \quad (4.4a)$$

$$\psi_2(\rho) \equiv G_n^\ell(\rho) = \sum_{m=0}^{[\frac{n+\ell+1}{2}]} (-1)^m \frac{(n + \ell + 1)! \Gamma(1/2 - \ell)}{(n + \ell + 1 - 2m)! \Gamma(1/2 - \ell + m) m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} \quad (4.4b)$$

onde  $[j]$  denota a menor parte inteira de  $j$ .

---

<sup>1</sup> Note que  $a_{2m}$  e  $b_{2m}$  estão relacionados pela troca  $-\ell \leftrightarrow \ell + 1$ .



Observando a mudança na variável dependente resulta que a solução geral da equação radial (3.4) é, para  $n \geq \ell$ , dada por:

$$U(\rho) = \frac{\alpha_1 E_n^\ell(\rho) + \alpha_2 G_n^\ell(\rho)}{\rho^{\ell+1}(1 + \rho^2)^{n/2}} \quad (4.5)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes arbitrárias.

### §3. CONEXÃO COM AS FUNÇÕES ESPECIAIS

É evidente que os polinômios  $E_n^\ell(\rho)$  e  $G_n^\ell(\rho)$  estão relacionados de alguma forma com o par de funções da solução (3.13), pois, ambos são soluções da mesma equação.

Por comparação da equação (4.5) com a equação (3.15) resulta que:

$$\frac{E_n^\ell(\rho)}{\rho^{\ell+1}(1 + \rho^2)^{n/2}} = a_1 U_1(\rho) \quad \text{e} \quad \frac{G_n^\ell(\rho)}{\rho^{\ell+1}(1 + \rho^2)^{n/2}} = a_2 U_2(\rho)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes a serem determinadas. Explicitamente temos:

$$\frac{E_n^\ell(\rho)}{\rho^{\ell+1}(1 + \rho^2)^{n/2}} = a_1 \left( \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \right)^{\ell/2} \left( \frac{i + \rho}{i - \rho} \right)^{\frac{n-\ell}{2}} {}_2F_1 \left( \ell + 1, \ell - n; 2\ell + 2; \frac{2\rho}{\rho + i} \right);$$

onde  $n \geq \ell$  e

$$\frac{G_n^\ell(\rho)}{\rho^{\ell+1}(1 + \rho^2)^{n/2}} = a_2 \left( \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} \right)^{\frac{\ell+1}{2}} \left( \frac{i + \rho}{i - \rho} \right)^{\frac{n+\ell+1}{2}} {}_2F_1 \left( -\ell, -n - \ell - 1; -2\ell; \frac{2\rho}{\rho + i} \right),$$

para  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

Tomando, em particular,  $\rho = 0$  nas relações acima obtemos  $a_1 = n - \ell + 1$ ,  $a_2 = 1$ , logo:

$$E_n^\ell(\rho) = (n - \ell + 1) \rho^{2\ell+1} (1 + \rho^2)^{\frac{n-\ell}{2}} \left( \frac{i + \rho}{i - \rho} \right)^{\frac{n-\ell}{2}} {}_2F_1 \left( \ell + 1, \ell - n; 2\ell + 2; \frac{2\rho}{\rho + i} \right);$$

e

$$G_n^\ell(\rho) = (1 + \rho^2)^{\frac{n+\ell+1}{2}} \left( \frac{i + \rho}{i - \rho} \right)^{\frac{n+\ell+1}{2}} {}_2F_1 \left( -\ell, -n - \ell - 1; -2\ell; \frac{2\rho}{\rho + i} \right)$$

que podem ainda serem escritos como:

$$E_n^\ell(\rho) = (n - \ell + 1) \rho^{2\ell+1} (i\rho - 1)^{n-\ell} {}_2F_1 \left( \ell + 1, \ell - n; 2\ell + 2; \frac{2\rho}{\rho + i} \right)$$

e

$$G_n^\ell(\rho) = (i\rho - 1)^{n+\ell+1} {}_2F_1\left(-\ell, -n - \ell - 1; -2\ell; \frac{2\rho}{\rho + i}\right)$$

Os polinômios  $E_n^\ell(\rho)$  e  $G_n^\ell(\rho)$  podem ser relacionados com os polinômios ultrasféricos, ou polinômios de Gegenbauer, os quais denotaremos por  $C_k^\lambda(x)$ .

Com efeito, introduzindo na equação (3.4) a mudança na variável dependente  $U(\rho) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)^\ell S(\rho)$  obtemos a seguinte equação.

$$\frac{d^2}{d\rho^2}S + 2\frac{\ell+1+\rho^2}{\rho(1+\rho^2)}\frac{d}{d\rho}S + \frac{n(n+2) - \ell(\ell+2)}{(1+\rho^2)^2}S = 0.$$

Tomando  $x = 1/\sqrt{1+\rho^2}$  na equação acima temos:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}S - (2\ell+3)x\frac{d}{dx}S + [n(n+2) - \ell(\ell+2)]S = 0. \quad (4.6)$$

onde  $S = S(x)$ .

Identificando com a equação satisfeita pelos polinômios de Gegenbauer [Magnus], temos como solução regular em  $x = 0$ ,

$$S(x) = C_{n-\ell}^{\ell+1}(x)$$

onde  $n \geq \ell$ .

Observando as mudanças nas variáveis dependente e independente resulta que:

$$\frac{E_n^\ell}{\rho^{\ell+1}(1+\rho^2)^{n/2}} = \beta \left(\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)^\ell C_{n-\ell}^{\ell+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)$$

onde  $\beta$  é uma constante a ser determinada. Em particular, tomando  $\rho = 0$  tem-se  $C_{n-\ell}^{\ell+1}(1) = \frac{(n+\ell+1)!}{(2\ell+1)!(n-\ell)!}$ , donde resulta que  $\beta = \frac{(n-\ell+1)!(2\ell+1)!}{(n+\ell+1)!}$ , portanto:

$$E_n^\ell(\rho) = \frac{(n-\ell+1)!(2\ell+1)!}{(n+\ell+1)!} \rho^{2\ell+1}(1+\rho^2)^{\frac{n-\ell}{2}} C_{n-\ell}^{\ell+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right). \quad (4.7)$$

De forma semelhante, introduzindo-se na equação (3.4) a mudança na variável dependente  $U(\rho) = \left(\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\right)^{\ell+1} R(\rho)$  obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}R - 2\frac{\ell - \rho^2}{\rho(1 + \rho^2)}\frac{d}{d\rho}R + \frac{[n(n+2) + 1 - \ell^2]}{(1 + \rho^2)^2}R = 0.$$

Agora, tomando  $x = 1/\sqrt{1 + \rho^2}$  esta equação é escrita como:

$$(1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2}R + (2\ell - 1)x\frac{d}{dx}R + [n(n+2) + 1 - \ell^2]R = 0 \quad (4.8)$$

onde  $R = R(x)$ , cuja solução regular em  $x = 0$  é dada por  $R(x) = C_{n+\ell+1}^{-\ell}(x)$ .

É importante observar que os polinômios de Gegenbauer  $C_k^\lambda(x)$  não são definidos para  $\lambda < -1/2$ . Logo, para  $\ell = 1, 2, 3, \dots$   $R(x)$  não corresponde efetivamente a tais polinômios, mas, correspondem, conforme [Szëgo], a um caso limite. De fato:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -m} \frac{C_k^\lambda(x)}{\lambda + m} &= \lim_{\lambda \rightarrow -m} \frac{1}{\lambda + m} \frac{\Gamma(2\lambda + k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2\lambda)} {}_2F_1\left(-k, 2\lambda + k; \lambda + 1/2; \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= 2(2m)! \frac{(n - 2m - 1)!}{k!} {}_2F_1\left(-k, k - 2m, m + 1/2; \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= 2(2m)! \frac{(k - 2m - 1)}{k!} C_k^{-\ell}(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

válido para  $k \geq 2m + 1$ .

Em nosso caso temos  $\lambda = -\ell, \ell = 1, 2, 3, \dots$  e  $k = n + \ell + 1$ , portanto para  $n \geq \ell$  o limite acima é satisfeito. Donde segue de forma análoga a  $E_n^\ell(\rho)$  e utilizando-se do limite (4.8) que:

$$G_n^\ell(\rho) = (1 + \rho^2)^{\frac{n+\ell+1}{2}} C_{n+\ell+1}^{-\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}}\right) \quad (4.10)$$

válido para  $n \geq \ell$ .

Das equações (4.7) e (4.10) podemos escrever a solução geral da equação (3.4) para o caso em que  $n \geq \ell$  como:

$$U(\rho) = \left(\frac{\rho^2}{1 + \rho^2}\right)^{\frac{\ell}{2}} \left[ a C_{n-\ell}^{\ell+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}}\right) + b \left(\frac{1 + \rho^2}{\rho^2}\right)^{\frac{\ell+1}{2}} C_{n+\ell+1}^{-\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}}\right) \right] \quad (4.11)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias, isto implica que  $\left(\frac{1 + \rho^2}{\rho^2}\right)^{\frac{\ell+1}{2}} C_{n+\ell+1}^{-\ell}(x)$  é linearmente independente a  $C_{n-\ell}^{\ell+1}(x)$ , isto é, consiste na segunda solução linearmente independente da equação (4.6).

Passemos agora a discutir o caso em que temos simetria esférica. Neste caso, temos  $\ell = 0$ , assim, a partir das relações (4.4a) e (4.4b) obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
G_n^0(\rho) &\equiv G_n(\rho) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{(n+1)!}{(n+1-2m)!(2m)!} \rho^{2m} e \\
E_n^0(\rho) &\equiv E_n(\rho) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n+1)!}{(n-2m)!(2m+1)!} \rho^{2m+1}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

que coincidem com os polinômios obtidos por Arcidiacono e Rizzi [Rizzi].

Utilizando as seguintes relações

$$\begin{aligned}
C_n^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right) &= \mathcal{U}_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right) e \\
C_{n+1}^0\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right) &= \frac{1}{n+1} T_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)
\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{U}_n(x)$  e  $T_n(x)$  são, respectivamente, os polinômios de Tchebyshev de primeira e segunda espécies [Magnus], logo, segue das equações (4.7) e (4.10), respectivamente,

$$\begin{aligned}
G_n(\rho) &= \frac{(1+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} T_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right) e \\
E_n(\rho) &= \rho(1+\rho^2)^{n/2} \mathcal{U}_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

que está de acordo com [Capelas de Oliveira].

#### §4. ESTUDO DOS POLINÔMIOS $E_n^\ell(\rho)$ E $G_n^\ell(\rho)$

Considere os polinômios  $E_n^\ell(\rho)$  e  $G_n^\ell(\rho)$  dados em (4.4.a e b). Verifica-se diretamente a validade das seguintes relações:

$$E_n^\ell(\rho) = \rho^{2\ell+1} (n - \ell + 1) G_n^{-(\ell+1)}(\rho) ; n \geq \ell \tag{4.13a}$$

e

$$G_n^\ell(\rho) = \frac{\rho^{2\ell+1}}{n + \ell + 2} E_n^{-(\ell+1)}(\rho) ; n \geq -\ell - 1 \tag{4.13b}$$

e, com relação à derivada primeira temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho} E_n^\ell(\rho) &= (1 + 2\ell)\rho E_{n-1}^{\ell-1}(\rho) \\
\frac{d}{d\rho} G_n^\ell(\rho) &= \frac{(n + \ell)(n + \ell + 1)}{2\ell - 1} \rho G_{n-1}^{\ell-1}(\rho).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Em particular, para  $\ell = 0$  e usando (4.13), decorre

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho} E_n^0(\rho) &= \rho E_{n-1}^{-1}(\rho) = (n + 1)G_{n-1}^0(\rho) \\
\frac{d}{d\rho} G_n^0(\rho) &= -n(n + 1)\rho G_{n-1}^{-1}(\rho) = -(n + 1)E_{n-1}^0(\rho).
\end{aligned}$$

Valendo-se da relação (4.7) entre  $E_n^\ell(\rho)$  e os polinômios de Gegenbauer e utilizando a fórmula de recorrência pura destes últimos [Gradshteyn], obtemos a seguinte fórmula de recorrência pura para  $E_n^\ell(\rho)$

$$\begin{aligned}
&(n - \ell + 2)(n + \ell + 3)E_{n+2}^\ell(\rho) = \\
&= 2(n + 2)(n - \ell + 3)E_{n+1}^\ell(\rho) - (1 + \rho^2)(n - \ell + 3)(n - \ell + 2)E_n^\ell(\rho).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Derivando a fórmula de recorrência acima duas vezes em relação a  $\rho$  e utilizando a equação (4.1) obtemos a seguinte fórmula de recorrência na derivada

$$\rho \frac{d}{d\rho} E_{n+1}^\ell(\rho) = (n + \ell + 2)E_{n+1}^\ell(\rho) - (n - \ell + 2)E_n^\ell(\rho) \tag{4.16}$$

Exibimos nas duas tabelas subsequentes alguns dos polinômios  $E_n^\ell(\rho)$  e  $G_n^\ell(\rho)$ . Observe que este último está definido para todo  $\ell$ , enquanto o primeiro apenas para  $n \geq \ell$ .

$E_n^\ell(\rho)$				
$n \setminus \ell$	0	1	2	3
0	$\rho$	—	—	—
1	$2\rho$	$\rho^3$	—	—
2	$\rho(3 - \rho^2)$	$2\rho^3$	$\rho^5$	—
3	$\rho(4 - 4\rho^2)$	$\rho^3(3 - \frac{3}{5}\rho^2)$	$2\rho^5$	$\rho^7$

$G_n^\ell(\rho)$				
$n \setminus \ell$	0	1	2	3
0	1	$1 + \rho^2$	$1 + \rho^2$	$1 + \frac{6}{5}\rho^2 + \frac{1}{5}\rho^4$
1	$1 - \rho^2$	$1 + 3\rho^2$	$1 + 2\rho^2 + \rho^4$	$1 + 2\rho^2 + \rho^4$
2	$1 - 3\rho^2$	$1 + 6\rho^2 - 3\rho^4$	$1 + \rho^2 + \rho^4$	$1 + 3\rho^2 + 3\rho^4 + \rho^6$
3	$1 - 6\rho^2 + \rho^4$	$1 + 10\rho^2 + 15\rho^4$	$1 + 5\rho^2 + 15\rho^4 - 5\rho^6$	$1 + \frac{21}{5}\rho^2 + 7\rho^4 + 7\rho^6$

É importante observar que para  $\ell \equiv 0$ , as fórmulas de recorrência (4.15) e (4.16) continuam válidas para  $G_n(\rho)$ ; pois estes também satisfazem a equação (4.1) e estão relacionados aos polinômios de Gegenbauer e não a sua segunda solução linearmente independente.

Suponhamos a existência das funções geratrizes dos polinômios  $E_n(\rho)$  e  $G_n(\rho)$ , isto é, a existência das funções  $g(\rho, t)$  e  $h(\rho, t)$  tais que:

$$g(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\rho) t^n \text{ e } h(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\rho) t^n \quad (4.17)$$

para  $t \in I = (-\delta, \delta)$ , onde  $0 < \delta$ .

Derivando  $g(\rho, t)$  e  $h(\rho, t)$  em relação a  $t$  e usando a fórmula de recorrência (4.15) obtemos, respectivamente, as seguintes equações:

$$\begin{aligned} [(t-1)^2 + t^2 \rho^2] \frac{d}{dt} g &= -[2(t-1) + 2t\rho^2]g \quad \text{e} \\ [(t-1)^2 + t^2 \rho^2] \frac{d}{dt} h &= -[2(t-1) + 2t\rho^2]h + (1 + \rho^2) \end{aligned}$$

donde obtemos

$$g(\rho, t) = \frac{\rho}{(t-1)^2 + t^2 \rho^2} \quad ; \quad h(\rho, t) = \frac{1 - t(\rho^2 + 1)}{(t-1)^2 + t^2 \rho^2}. \quad (4.18)$$

Deste modo, conforme [Gomes] os polinômios  $E_n(\rho)$  e  $G_n(\rho)$  são dados por:

$$E_n(\rho) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} g(\rho, t) \Big|_{t=0} \quad \text{e} \quad G_n(\rho) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} h(\rho, t) \Big|_{t=0}. \quad (4.19)$$

Finalmente, considerando  $t = z$  complexo, multiplicando ambos os lados de (4.18) por  $z^{-m-1}$  e integrando num contorno simples fechado  $\gamma$  no sentido anti-horário em torno de  $z = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g(\rho, z) z^{-m-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n(\rho) \oint_{\gamma} z^{n-m-1} dz) \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} h(\rho, z) z^{-m-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (G_n(\rho) \oint_{\gamma} z^{n-m-1} dz) \end{aligned}$$

e do teorema de Cauchy para o cálculo dos resíduos, resulta nas seguintes representações integrais para  $E_n(\rho)$  e  $G_n(\rho)$ , respectivamente:

$$E_n(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\rho}{z^{n+1}[(z-1)^2 + z^2 \rho^2]} dz$$

e

$$G_n(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1 - z(\rho^2 + 1)}{z^{n+1}[(z-1)^2 + z^2 \rho^2]} dz. \quad (4.20)$$

## §5. A LEI DE GRAVITAÇÃO NO UNIVERSO DE CASTELNUOVO

Para concluir este capítulo consideraremos a generalização, devida a Arcidiacono [Arcidiacono (a) e (b)], da lei de gravitação newtoniana ao universo de Castelnuovo. Limitar-nos-emos a discutir o campo gravitacional criado na ausência de matéria, o chamado problema exterior, desta forma o campo gravitacional satisfaz a equação (2.5). Na presença de matéria temos um termo de não homogeneidade nesta equação, equivalente a equação de Poisson na mecânica clássica, uma discussão deste caso, quando  $\lambda = 0$ , é encontrada em [Pessa].

Do mesmo modo que em mecânica clássica admite-se que o campo gravitacional na R.E.P. seja radialmente simétrico, isto é, depende apenas da distância entre os corpos. Assim o potencial gravitacional satisfaz a equação (3.4) com  $\ell = 0$ . Tomando em especial  $\lambda = n$ ;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  obtemos como solução geral para o campo gravitacional

$$\varphi_n(\rho) = \frac{\alpha E_n(\rho) + \beta G_n(\rho)}{\rho(1 + \rho^2)^{n/2}} \quad (4.21)$$

onde  $\rho = r/R$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ;  $E_n(\rho)$  e  $G_n(\rho)$  são dados pela equação (4.12) e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes arbitrárias.

Quando consideramos o problema local do campo gravitacional o raio do universo de de-Sitter é muito grande em relação ao raio espacial  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ,  $r \ll R$ . Deste modo podemos desprezar os termos com potência maior que a unidade na equação (4.21), donde segue que  $E_n(\rho) \sim \rho$ ;  $G_n(\rho) \sim 1$ ;  $(1 + \rho^2)^{n/2} \sim 1$ . Portanto, o potencial gravitacional local é dado por  $\varphi_n(\rho) = \alpha + \beta/\rho$ , observando que  $\rho = r/R$ , temos

$$\varphi_n(r) = \alpha + R\beta/r$$

que está de acordo com o potencial newtoniano. Assim devemos tomar  $\beta = -\frac{gM}{R}$ , onde:  $g$  é a constante de gravitação de Newton e  $M$  a massa.

A partir do campo gravitacional temos  $f_n(r) = \frac{d}{dr}\varphi_n(r/R)$  a força gravitacional. É evidente que para o problema local, a força gravitacional na R.E.P. coincide com a



mecânica clássica.

Para grandes distâncias, o chamado problema global, o potencial depende do valor de  $n$ , a seguir considera-se alguns casos específicos.

Para  $n = 0$  obtemos o potencial newtoniano e a lei da gravitação de Newton

$$\varphi_0(r) = -gM/r \text{ e } f_0(r) = gM/r^2.$$

Para  $n = 1$  temos:

$$\begin{aligned}\varphi_1(r) &= (1 + r^2/R^2)^{-1/2} \left( 2\alpha - gM \frac{1 - r^2/R^2}{r} \right) \\ f_1(r) &= (1 + r^2/R^2)^{-3/2} \left( \frac{2\alpha}{R^2} + gM \frac{1 + 3r^2/R^2}{r^2} \right)\end{aligned}$$

Para  $n = 2$  temos:

$$\begin{aligned}\varphi_2(r) &= (1 + r^2/R^2)^{-1} \left[ \alpha(3 - r^2/R^2) - gM \frac{1 - 3r^2/R^2}{r} \right] \\ f_2(r) &= (1 + r^2/R^2)^{-2} \left[ -\frac{8\alpha}{R^2} r + gM \frac{1 + 6r^2/R^2 - 3r^4/R^4}{r^2} \right]\end{aligned}$$

Para  $n = 3$  temos:

$$\begin{aligned}\varphi_3(r) &= (1 + r^2/R^2)^{-5/2} \left[ \alpha(4 - 4r^2/R^2) - gM \frac{1 - 6r^2/R^2 + r^4/R^4}{r} \right] \\ f_3(r) &= (1 + r^2/R^2)^{-5/2} \left[ -\frac{\alpha}{R^2} r(4r^2/R^2 - 20) + gM \frac{1 + 10r^2/R^2 - 15r^4/R^4 - 2r^6/R^6}{r^2} \right].\end{aligned}$$

Finalmente, em R.E.P. temos duas constantes  $\alpha$  e  $gM$ , a primeira está ligada à repulsão cósmica, a segunda é a constante de Newton. Vemos que novos termos, proporcionais à potência da distância, comparecem. E esses termos são tanto de natureza atrativa como repulsiva dependendo do valor assumido por  $n$ .

## APÊNDICE

Ilustraremos algumas das consequências físicas do grupo de Fantappiè. Seus detalhes e outros resultados, dentre eles o efeito Doppler no universo de Castelnovo são discutidos nos trabalhos de Arcidiacono citados nas referências. Por simplicidade consideraremos apenas o caso bidimensional.

A equação (1.8) para  $t'$  pode ser considerada como sendo a adição de dois intervalos. Fazendo  $d = t'$ ,  $d_1 = t$  e  $d_0 = T_0$  temos:

$$d = \frac{d_1 + d_0}{1 + d_1 d_0 / t_0^2} \quad (1)$$

que é análoga à fórmula de adição de velocidades da Relatividade Especial e como tal, para  $-t_0 \leq d_0 \leq t_0$  e  $t_0 \leq d_1 \leq t_0$  temos  $t_0 \leq d \leq t_0$  e assim  $t_0$  pode ser interpretado como sendo a idade aparente do universo de Castelnovo.

Fazendo  $T_0 = t_0$  na equação (1.8) obtemos  $x' = 0$ , qualquer que seja  $x$ , consequentemente o universo se reduz a um ponto o que corresponde à teoria do Big-Bang cósmico.

Denotando  $W = \frac{dx'}{dt'}$  e  $U = \frac{dx}{dt}$  a velocidade de uma partícula nos referenciais  $k' = (x', t')$  e  $k = (x, t)$ , respectivamente, a lei de adição de velocidades para uma transformação geral a três parâmetros  $T_0, T$  e  $V$ , é dada por  $W = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'}$ . Da equação (1.12) segue que:

$$W = \frac{U + AV + \alpha(\alpha - \beta\gamma)U + \beta\gamma(Ut - x)t_0}{A + UV/c^2 + \gamma(\gamma - \beta\gamma) + B\alpha(Ut - x)/R} \quad (2)$$

onde  $\alpha = T/R$ ,  $\beta = V/c$  e  $\gamma = T_0/t_0$  são os parâmetros, de translação espacial, deslocamento inercial, e translação temporal, respectivamente,  $t_0 = R/c$ ,  $R$  é o raio do universo de de-Sitter e  $c$  é a velocidade da luz.

Para  $\alpha = \gamma = 0$  obtemos:

$$W = \frac{U + V}{1 + UV/c^2} \quad (3)$$

que, formalmente, coincide com a lei de adição de velocidades da relatividade especial.

Para  $\alpha = \beta = 0$  temos a lei de adição de velocidades para uma translação temporal

$$W\sqrt{1-\gamma^2} = U(1 + \gamma t/t_0) - \gamma x/t_0.$$

Em particular para  $\gamma = 1$ , ou seja  $T_0 = t_0$  temos:

$$U = \frac{x}{t_0 + t} \quad (4)$$

que fornece a lei de expansão cósmica válida para  $-t_0 \leq t \leq 0$ .

Para  $t = -t_0$  a velocidade de expansão é infinita, enquanto para  $t = 0$  temos

$$U = Hx$$

onde  $H = 1/t_0 = R/c$  é a chamada constante de Hubble da expansão cósmica.

Considerando  $\tau$  uma galáxia, seja  $x$  a distância entre  $\tau$  e um observador na origem de seu referencial, conseqüentemente o tempo do observador está atrasado em relação a  $\tau$  por  $t = -x/c$ , logo a velocidade de expansão de  $\tau$ , dada pela equação (4) é então:

$$U = \frac{cx}{R - x}.$$

No caso particular em que tomamos  $x = R/2$  temos  $U = c$ . E, finalmente, tomando  $R/2 < x < R$ , temos  $U > c$ .

Se tomarmos  $\gamma = -1$ , obtemos, analogamente a lei de contração cósmica válida para  $0 < t < t_0$

$$U = \frac{x}{t - t_0} \quad (5)$$

Covém observar que tanto a contração como a expansão do universo de Castelnuovo não provêm do campo gravitacional, estando ligadas à sua estrutura geométrica.

Finalmente, observando a igualdade formal entre a transformação do grupo de Fantappiè e o grupo de Lorentz para o deslocamento inercial, equação (1.9), temos os mesmos resultados da Relatividade Especial baseados na transformação de Lorentz válidos na R.E.P., em particular temos a contração do espaço e a dilatação do tempo.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho examinamos do ponto de vista da teoria de grupos, proposta por Fantappiè, o universo de de-Sitter mediante sua representação projetiva, denominada universo de Castelnuovo. Neste sentido, a partir do grupo de Fantappiè, a Relatividade Especial é estendida de forma única ao universo dessiteriano originando a Relatividade Especial Projetiva, a qual está de acordo com a expansão cósmica e de onde se obtém a primeira como caso limite quando o raio do universo de de-Sitter é infinito.

Outro ponto enfocado é a equação diferencial parcial satisfeita pelo potencial no universo de Castelnuovo, a qual denominamos equação de Laplace projetiva. Da geometria do universo de Castelnuovo foi possível obter esta equação diferencial parcial numa forma um pouco mais geral daquela que é dada pelo cálculo tensorial, dependendo de um parâmetro  $\lambda$ . Deste modo a equação de Laplace projetiva consiste numa equação diferencial parcial a auto-valores. Mostramos que o problema de Dirichlet possui solução única para  $\lambda$  no intervalo fechado  $I = [-2, 0]$ , o que implica que neste intervalo  $\lambda$  não é auto-valor. Particularizando para o problema de Dirichlet no interior da esfera obtemos um equivalente a alternativa de Fredholm da teoria espectral, onde a caracterização de  $\lambda$  como um auto-valor está diretamente ligada ao estudo dos zeros da função  $U_1(\rho)$  dada pela equação (3.15).

Quando expressa em coordenadas esférica a equação de Laplace projetiva é separável em suas variáveis angulares e radial. Nas variáveis angulares coincide com a equação de Laplace, donde resultam os harmônicos esféricos.

Já a parte radial é resolvida em termos das funções hipergeométricas, particularmente quando  $\lambda$  é um inteiro positivo obtemos solução polinomial. Esses polinômios apresentam-se estreitamente ligados aos polinômios de Gegenbauer, de certa forma isto é natural, pois, é sabido que os polinômios de Gegenbauer são obtidos como solução regular da parte angular do laplaciano em coordenadas esféricas quadridimensional e a parte "*espacial*" do universo de de-Sitter corresponde a uma esfera quadridimensional.

Ainda com relação ao potencial é interessante observar que quando o raio espacial é muito pequeno em relação ao raio do universo de de-Sitter, podemos aproximá-lo pelo potencial clássico newtoniano, o que está coerente com o fato de no limite, quando o raio do universo de de-Sitter é infinito, a equação de Laplace projetiva ser aproximada pela equação de Laplace clássica e a Relatividade Especial Projetiva pela Relatividade Especial.

Finalmente, indicamos como possibilidade para próximos trabalhos os tópicos apresentados e não desenvolvidos neste trabalho, dentre eles, em especial, o problema no infinito para a equação de Laplace projetiva, a equação de D' Alembert projetiva e também o estudo dos sistemas de coordenadas nos quais esta seja separável.

## REFERÊNCIAS

ARCIDIACONO, G.

– a) *Projective Relativity Cosmology and Gravitation*, Hadronic Press Inc., Massachusetts, (1986) – *Relatività e Cosmologia*, vol. II, 4<sup>o</sup> ed., Veschi, Roma, (1987)

– b) *A new "Projective Relativity" based on the de Sitter Universe*, General Relativity and Gravitation, **7**, 885, (1976).

Sumário: É possível desenvolver uma nova "relatividade projetiva" baseada no universo de de-Sitter com curvatura constante. Esta teoria estende a teoria da relatividade especial em escala cosmológica, e é similar a relatividade cinemática de Milne.

– *L' Universo de de-Sitter-Castelnuovo in Cosmologia e Microfisica* Coll. Math. XXXIII, **95**, (1982).

Sumário: Neste trabalho, considera-se o momento linear e angular projetivos, o d' alembertiano e o laplaciano no universo de de-Sitter e o estudo das partículas elementares como sendo "micro universos", constituindo uma aplicação da relatividade projetiva à cosmologia e à micro física.

BIRKHOFF, A. e MAC LANE, S. – *Álgebra Moderna Básica*, 4<sup>o</sup> ed., Guanabara Dois, Rio de Janeiro, (1980).

CAPELAS DE OLIVEIRA, E. and ARCIDIACONO, G. – *Sull' Equazione di Laplace nell' Universo di de-Sitter*, R.T. 27/91, IMECC-UNICAMP, Campinas (1991).

Sumário: O universo de de-Sitter pode ser estudado usando a representação geodésica de Beltrami e deste modo obtemos a Relatividade Especial Projetiva baseada no grupo de Fantappiè.

Neste trabalho examina-se a equação de Laplace generalizada na relatividade projetiva, a qual resulta numa equação a auto-valores. As soluções desta equação são expressas por meio das funções hipergeométricas. No caso onde os auto valores são inteiros obtém-se os polinômios de Jacobi.

DUBROVIN, B.A.; FOMENKO, A.T. and NOVIKOV, S.P. – *Modern Geometry – Methods and Applications*, part. I, Springer-Verlag, New York, (1984).

GILBARG, D. and TRUDINGER, N.S. – *Elliptic Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York, (1983).

GOMES, D. e CAPELAS DE OLIVEIRA, E. – *A Equação de Laplace no Universo de de-Sitter – Castelnovo*, XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC, Uberlândia, M.G., (1993).

Sumário: Neste trabalho caracteriza-se o modelo cosmológico de de-Sitter – Castelnovo, através do grupo de Fantappiè. Discute-se a equação satisfeita pelo potencial radialmente simétrico neste universo.

GRADSTEYN, I.S. and RYZHIK, I.M. – *Table Integrals Series and Products*, Academic Press, New York, (1965).

HAWKING, S.W. and ELLIS, G.F.R. – *The Large Scale Struture of Space-Time*, Cambrigde Univ. Press, London, (1979).

LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. – *Théorie du Champ*, 2<sup>o</sup> ed., Mir Editorial, Moscou, (1966).

MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F. and SONI, R.P. – *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 3<sup>o</sup> ed., Springer-Verlag, New York, (1966).

MERLEAU-PONTY, J. – *Cosmologia del Siglo XX*, Gredos Editorial, Madri, (1971).

PESSA, E. – *Poisson's Equation in de Sitter Space-Time*, General Relativity and Gravitation, 12, 913, (1980).

Sumário: A forma da lei da “gravitação” em “relatividade projetiva” é investigada, baseada numa generalização adequada da equação de Poisson no espaço-tempo de de-Sitter; é encontrado que, no caso interior, tem-se uma pequena diferença opondo-se a costumeira lei newtoniana. Esta diferença, de caráter repulsivo, pode ser muito importante em problemas cosmológicos.

RIZZI, B. e ARCIDIACONO, G. – *Sull' equazione di Laplace Generalizzata nell' Universo di de-Sitter*, Rendiconti di Matematica, 7, 232, (1987).

Sumário: A equação de Laplace pode ser estendida ao universo de de-Sitter, usando sua representação geodésica de Beltrami, e obtém-se uma equação a auto-valor  $\lambda$ . Esta equação é resolvida no caso do campo com simetria esférica estática, e para  $\lambda$  inteiro positivo, essas soluções são polinômios.

SOTOMAYOR, J. – *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Proj. Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).

SZĚGO, G. – *Orthogonal Polynomials*, American Math. Soc. Colloquium Pub. n<sup>o</sup> 23, (1959).

TIJONOV, A.N. e SAMARSKI, A.A. – *Equaciones de la Fisica-Matemática*, 2<sup>o</sup> ed., Mir Editorial, Moscou, (1980).